

Electrotecnia Circuitos eléctricos

Saturnino Catalán Izquierdo



Saturnino Catalán Izquierdo

Electrotecnia: circuitos eléctricos

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Ingeniería eléctrica de la UPV

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: CATALÁN IZQUIERDO, SATURNINO (2013) *Electrotecnia: circuitos eléctricos*. Valencia: Universitat Politècnica

Primera edición, 2013 (versión impresa)
Primera edición, 2013 (versión electrónica)

© Saturnino Catalán Izquierdo

© de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València
Distribución: Telf. 963 877 012 / <http://www.lalibreria.upv.es> / Ref.: 6145-1-1-1

ISBN: 978-84-9048-117-2 (versión impresa)
ISBN: 978-84-9048-139-4 (versión electrónica)

Queda prohibida la reproducción, la distribución, la comercialización, la transformación y, en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de la totalidad o de cualquier parte de esta obra sin autorización expresa y por escrito de los autores.

prólogo

Electrotecnia es la denominación clásica del “estudio de las aplicaciones técnicas de la electricidad”. El hábito hace que no lo percibamos, pero sin el conocimiento y dominio de la electricidad no hubiera sido posible el intenso desarrollo que nuestra Sociedad ha experimentado en el último siglo. Resulta difícil encontrar cualquier actividad que no dependa de la energía eléctrica o que no utilice la electricidad para transmitir información.

Y a pesar de su juventud la Electrotecnia es, desde hace tiempo, una ciencia madura. A ello han contribuido la inteligencia y el esfuerzo humano acumulado en estos pocos años, pero no hubiera sido posible sin la simplicidad que muestran las leyes físicas que gobiernan el campo electromagnético como uno de los fundamentos de nuestro Universo.

En los inicios de cualquier ciencia su estudio solo puede realizarse siguiendo, uno a uno, los pasos que se demuestran acertados de los que nos precedieron, pero, conforme el conocimiento avanza, década a década o siglo a siglo, este procedimiento resulta inviable: No podemos repetir lo que hicieron todos nuestros antecesores.

Pero una ciencia madura puede estudiarse con más comodidad: Todos los conceptos han sido razonablemente explicados previamente, se han encontrado los mejores caminos para conocerla y, además, se han desarrollado un gran número de aplicaciones.

Tan peligroso resulta intentar superar el enfoque “historicista” de la primera época centrándose en desarrollar aplicaciones actuales sin entender cómo funcionan realmente, porque se han olvidado los fundamentos básicos, como mantener el estudio de procedimientos y métodos que han quedado obsoletos.

En este texto hemos destilado la parte sin la cual el resto de la Electrotecnia no existiría: todos los conceptos fundamentales. El objetivo básico es comprender la relación que existe entre los elementos reales y su representación mediante *circuitos eléctricos*. Estos modelos, mucho más sencillos que la realidad pero suficientemente exactos, nos permitirán analizar sistemas complejos, diseñar máquinas, ...Y sin gran esfuerzo, gracias a las herramientas de cálculo actuales.

S.Catalán
Agosto 2013

índice

En la parte inicial de cada capítulo se exponen los conceptos teóricos. En una primera aproximación puede ser suficiente el estudio de esta parte, sin embargo, es necesario realizar los ejemplos cortos que se incluyen en cada capítulo para garantizar que realmente se han entendido todos los conceptos. La conexión con los elementos reales sólo puede lograrse realizando ensayos como los que se proponen en cada capítulo. Finalmente, un nivel mucho más profundo de comprensión se logra realizando los problemas. Los conceptos abordados en cada capítulo se construyen sobre los precedentes: es importante avanzar de forma secuencial.

prólogo	v
índice	vii
bibliografía	xi
1. CONCEPTOS BÁSICOS	1
1.- Fundamentos físicos: Ecuaciones de Maxwell	3
2.- Leyes de Kirchhoff	4
3.- Elementos pasivos ideales R, L, C. Ecuaciones de definición. Impedancia y admitancia.	6
4.- Elementos activos ideales. Fuentes de potencia	8
5.- Potencia y energía	8
6.- Nomenclatura. Convenios de signos	9
Ejemplos:	11
Problemas	12
Ensayos	16
Ideas básicas sobre riesgos eléctricos y seguridad	17
2. MEDIDA DE MAGNITUDES ELÉCTRICAS	19
1.- Valor instantáneo, medio y eficaz	21
2.- Errores de medida	21
3.- Medida de tensiones, intensidades y resistencias	22
Ejemplos	25
Ensayos	27
2.1.- Medida de resistencia eléctrica	27
2.2.- Medida de tensiones, corrientes y potencias	27

3. RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS	29
1.- Topología de circuitos	31
2.- Ecuaciones independientes	31
3.- Resolución por mallas	33
4.- Resolución por nudos	34
5.- Solución general de circuitos	36
5.1.- Régimen permanente con fuentes constantes	37
5.2.- Régimen estacionario con fuentes sinusoidales	37
5.3.- Continuidad	38
5.4.- Régimen transitorio	39
Ejemplos	41
Problemas	46
Ensayos	58
3.1.- Circuitos con fuentes constantes en régimen permanente	58
3.2.- Transitorio y permanente en un circuito RC serie alimentado por una fuente constante	59
3.3.- Transitorio y permanente en un circuito RL serie alimentado por una fuente constante	60
3.4.- Transitorio y permanente en un circuito RC serie alimentado por una fuente sinusoidal	61
3.5.- Transitorio y permanente en un circuito RL serie alimentado por una fuente sinusoidal	63
4. TEOREMAS BÁSICOS	65
1.- Circuitos equivalentes	67
2.- Linealidad y Superposición	68
3.- Principio de Sustitución	70
4.- Equivalente de Thévenin. Equivalente de Norton	71
Ejemplos	75
Problemas	78
Ensayos	80
4.1.- Teorema de superposición	80
4.2.- Circuitos equivalentes	80
5. RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL	81
1.- Ventajas de la corriente alterna frente a la corriente continua	83

2.- Particularización del análisis de circuitos	84
3.- Representación gráfica	88
4.- Expresión general de la potencia instantánea $p(t)$ y la energía instantánea $w(t)$	91
5.- Potencia consumida. Potencia generada $[P, Q, S]$	95
6.- Factor de potencia. Energía activa y reactiva	99
7.- Teorema de Boucherot	99
8.- Circuitos en régimen estacionario no-sinusoidal	100
Ejemplos	113
Problemas	112
Ensayos	131
5.1.- Comportamiento de los elementos pasivos RLC lineales	131
5.2.- Análisis fasorial de circuitos en serie	131
5.3.- Análisis fasorial de circuitos en paralelo	132
5.4.- Circuitos equivalentes	132
6. SISTEMAS TRIFÁSICOS	133
1.- Generación de un sistema trifásico.	135
2.- Ventajas frente a los monofásicos	141
3.- Equivalentes estrella $\Leftrightarrow$ triángulo	143
4.- Análisis: Estudio de una fase	145
5.- Potencia	146
6.- Desequilibrio en la fuente y desequilibrio en la carga	146
7.- Resolución de circuitos desequilibrados mediante procedimientos generales	147
8.- Armónicos en sistemas trifásicos	148
9.- Limitaciones de los procedimientos generales	150
Ejemplos	152
Problemas	162
Ensayos	167
6.1.- Conexión en estrella y conexión en triángulo de cargas equilibradas	167
6.2.- Mejora del factor de potencia	167
6.3.- Conexión en estrella de cargas desequilibradas	168
6.4.- Conexión en triángulo de cargas desequilibradas	168
6.5.- Cargas trifásicas no-lineales	169

ANEXOS	171
3A.- Procesos físicos que conducen a ecuaciones análogas ..	173
Procesos térmicos	173
Procesos mecánicos	174
3.B.- Resumen de procedimientos de cálculo	178
Método clásico del Operador D	178
Método de la Transformada de Laplace	179

bibliografía

Resulta imposible, en un texto sobre aspectos fundamentales como es éste, mencionar las fuentes de conocimiento que se han utilizado. Muchos conocimientos forman parte ya del acervo cuyo origen es difícil rastrear. Otros no han pasado del estado de notas manuscritas, como las auténticas obras de arte que fueron las clases magistrales impartidas por el Prof. Jesús Marín Montesinos. Para los interesados en indagar en la evolución de la Electrotecnia resultará muy interesante:

- *A history of the theories of aether and electricity.*
E.T.Wittaker. 1910. Dublin university press series.

Para quienes deseen conocer los antecedentes más inmediatos:

- *Tratado de electrotecnia. I.- Bases científicas de la electrotecnia.*
Günther Oberdorfer. 1956. Editorial Labor.
- *Fundamentos de la electrotecnia. I y II. La escuela del técnico electricista.* Alfred Holzt, H. von Beeren y H.Teuchert.
Conocemos la ed. de 1961 de la Editorial Labor que nos regaló nuestro maestro, el Prof. Francisco Romualdo Pascual.

Y para profundizar en los contenidos con un enfoque actual:

- *Teoría de Circuitos.*
Enrique Ras Oliva. 1977. Marcombo.
- *Análisis de Fourier y cálculo operacional aplicados a la electrotecnia.* Enrique Ras Oliva. 1979. Marcombo.

1

CONCEPTOS BÁSICOS

- 1.-Fundamentos físicos: Ecuaciones de Maxwell*
- 2.-Ecuaciones de Kirchhoff*
- 3.-Elementos pasivos ideales R, L, C*
Ecuaciones de definición. Impedancia y admitancia
- 4.-Elementos activos ideales.*
Fuentes de potencia: de tensión y de corriente
- 5.-Potencia y energía*
- 6.-Nomenclatura. Convenios de signos*

1.- Fundamentos físicos: Ecuaciones de Maxwell

La electrotecnia es, básicamente, la aplicación tecnológica de los principios físicos del electromagnetismo. En las ecuaciones de Maxwell reside el fundamento físico de la electrotecnia y la importancia de estas ecuaciones reside en que forman un sistema que define completamente el campo electromagnético en cualquier lugar del espacio.

Con los convenios de signos habituales estas ecuaciones son:

Ley de Gauss del Campo Eléctrico:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon}$$

Ley de Gauss del Campo Magnético:

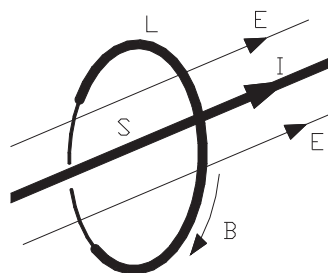
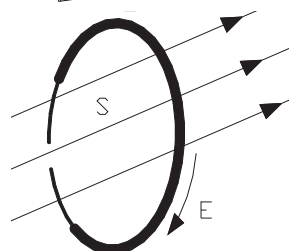
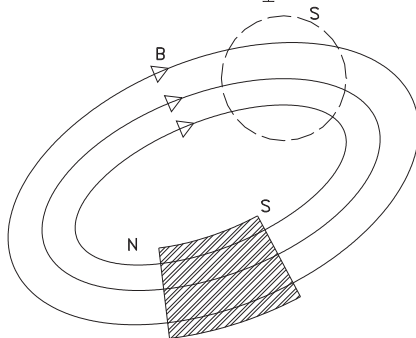
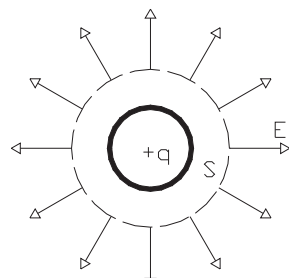
$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Ley de Faraday-Henry:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Ley de Ampere-Maxwell:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu \left(\int_S \vec{j} d\vec{S} + \epsilon \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} d\vec{S} \right)$$



En Electrotecnia interesa una simplificación que sea válida para frecuencias pequeñas (hasta algunos kHz), así la cuarta ecuación se convierte, porque el segundo sumando es insignificante frente al primero, en la *Ley de Ampere* $\oint_L \vec{B} d\vec{l} \approx \mu \sum_S i$.

Además, la resolución de este sistema de ecuaciones (para todo instante y en todo el espacio) no resulta en general factible. Es precisa una simplificación que concentre las propiedades de todo el espacio en unos cuantos elementos discretos. A las ecuaciones simplificadas resultantes se denomina leyes de Kirchhoff y a los elementos discretos ideales obtenidos: Resistencia, Bobina, Condensador y Fuente de Potencia.

2.- Leyes de Kirchhoff

Primera Ley: Si se aplica la ley de Ampere-Maxwell a una superficie (S) en forma de globo cuya abertura (L) tiende a un punto se obtiene:

$$0 = \mu \left(\oint_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{dq_{interior}}{dt} \right)$$

Porque el primer término es la circulación en un punto y el segundo sumando se ha sustituido por su valor con arreglo a la ley de Gauss del Campo Eléctrico. Como el primer sumando es la corriente que atraviesa la superficie cerrada (S) y el segundo la variación de la carga almacenada en su interior, esta ecuación demuestra el principio de conservación de la carga eléctrica.

Si la carga interior varía lentamente con el tiempo (como ocurre en la aplicaciones electrotécnicas) puede escribirse: *Corriente que Atraviesa una Superficie Cerrada* = 0, ó, separando entre corrientes entrantes y salientes por la superficie:

$$\sum \text{corrientes entrantes} = \sum \text{corrientes salientes} \\ \forall \text{Superficie cerrada}$$

Segunda Ley: El campo eléctrico electrostático es conservativo y, en consecuencia, a cada punto del espacio se puede asignar un potencial eléctrico, con lo que:

$$\int_m^n \vec{E} d\vec{l} = U_n - U_m$$

A esto se denomina *diferencia de potencial* o, simplemente, *tensión*. Sin embargo, la ley de Faraday-Henry indica que el campo eléctrico puede ser no-conservativo.

En aplicaciones electrotécnicas puede distinguirse fácilmente entre zonas en las que sólo existe el campo conservativo y zonas en las que coexiste el campo conservativo con el no-conservativo. Las zonas en las que el campo eléctrico es nulo, porque su campo conservativo y su campo no-conservativo son iguales y de sentido contrario, se denominan *fuentes ideales*. Así, separando cualquier trayectoria cerrada en los segmentos apropiados siempre es posible escribir:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E} d\vec{l} + \dots + \int_m^1 \vec{E} d\vec{l}$$

En los tramos que hemos denominado *fuentes ideales* la integral vale cero porque $E = 0$ ($\vec{E}_{\text{conservativo}} + \vec{E}_{\text{no-conservativo}} = 0$), en los demás tramos el campo es conservativo y la integral puede sustituirse por su *tensión*:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \sum \text{tensiones de los tramos conservativos}$$

Desde otro punto de vista, la integral de cada tramo puede separarse en su componente conservativa y su componente no-conservativa:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \left(\int_1^2 \vec{E}_c d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E}_c d\vec{l} + \dots + \int_m^1 \vec{E}_c d\vec{l} \right) + \left(\int_1^2 \vec{E}_{nc} d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E}_{nc} d\vec{l} + \dots + \int_m^1 \vec{E}_{nc} d\vec{l} \right)$$

El primer paréntesis se anula (es la circulación de un campo conservativo), pero para los tramos que hemos denominado *fuentes* el

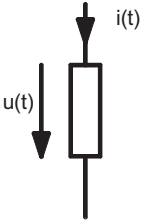
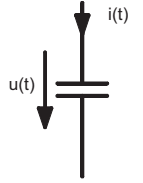
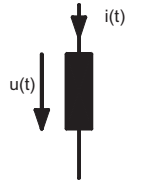
campo eléctrico $E_{\text{no-conservativo}} \neq 0$. La integral del campo eléctrico no conservativo se denomina *fuerza electromotriz* (f.e.m.):

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \sum \text{fuerzas electromotrices de las fuentes}$$

Con lo que un enunciado habitual de la Segunda Ley de Kirchhoff es:

$$\sum \text{fuerzas electromotrices de las fuentes} = \sum \text{tensiones de los tramos conservativos}$$

3.- Elementos pasivos ideales R, L, C. Ecuaciones de definición. Impedancia y admitancia

Elemento ideal	Elemento real representativo	Ecuación de definición	Representa:	Símbolo
R: Resistencia	Conductores	$u = R \cdot i$	conversión de energía electromagnética en otra forma de energía	
C: Capacidad	Condensadores	$i = C \frac{du}{dt}$	almacenamiento eléctrico $\frac{\epsilon E^2}{2} \text{ (J/m}^3\text{)}$	
L: Inductancia	Bobinas	$u = L \frac{di}{dt}$	almacenamiento magnético $\frac{B^2}{2\mu} \text{ (J/m}^3\text{)}$	

Los elementos pasivos se definen por su *tensión*, en consecuencia, se sitúan en el lado derecho de la 2ª Ley de Kirchhoff. El punto de partida de estos elementos ideales es sencilla:

R : En el interior de los conductores la densidad de cargas libres es muy alta por lo que la corriente eléctrica es proporcional a la tensión aplicada $u=R \cdot i$

C : La primera ecuación de Maxwell muestra que el campo eléctrico crece proporcionalmente a la carga, como además la tensión es proporcional al campo eléctrico, parece conveniente definir una magnitud denominada *capacidad eléctrica* que refleje esta relación: $C=\frac{q}{u}$. Y, como la carga por unidad de tiempo es la corriente, si la capacidad no varía: $i=\frac{dq}{dt}=C\frac{du}{dt}$

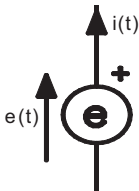
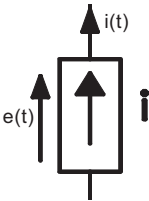
L : Tal como indica la Ley de Ampere, el flujo magnético de un elemento es proporcional a la corriente $\Phi=L \cdot i$. Además, conforme a la tercera Ley de Maxwell, la fuerza electromotriz es $e=-\frac{d\Phi}{dt}=-L\frac{di}{dt}$ Para representar este elemento como una tensión debe trasladarse este valor al lado derecho de la 2ª Ley de Kirchhoff cambiando de signo, esto es: $u=\frac{d\Phi}{dt}=L\frac{di}{dt}$

Pero no debe olvidarse que, una vez definidos estos elementos ideales, en cualquier circunstancia en que se produzca:

- la conversión de energía electromagnética en cualquier otra forma de energía la podremos representar mediante una R
- el almacenamiento de energía electromagnética en forma de campo magnético lo representaremos mediante una L.
- el almacenamiento de energía electromagnética en forma de campo eléctrico lo representaremos mediante una C.

4.- Elementos activos ideales. Fuentes de potencia: de tensión y de corriente

Representan la conversión de cualquier forma de energía en energía electromagnética. Se corresponden con las *fuentes ideales* definidas al obtener la Segunda Ley de Kirchhoff. Las fuentes más simples que pueden definirse son:

Denominación	Ecuación de definición	Símbolo
Fuente de tensión constante	$e = \text{constante}, \forall i$ $e = e(t), \forall i$	
Fuente de corriente constante	$i = \text{constante}, \forall e$ $i = i(t), \forall e$	

5.- Potencia y energía

Los elementos pasivos almacenan energía en forma de campo eléctrico (C) o magnético (L), o la convierten en otra forma de energía (R), en consecuencia absorben energía del sistema eléctrico. Las fuentes convierten en energía eléctrica otras formas de energía, en consecuencia aportan energía al sistema eléctrico.

Elementos pasivos: R, L, C	$p_{\text{consumida}} = u \cdot i$
Fuentes:	$p_{\text{generada}} = e \cdot i$

Puede observarse que se satisface el principio de conservación de la energía, por ejemplo, en un simple circuito con fuentes y elementos pasivos en serie: $\sum e = \sum u$, multiplicando ambos miembros por la corriente del circuito:

$$\sum p_{generada} = \sum p_{consumida}$$

Obviamente, cuando en un elemento pasivo se obtenga $p_{consumida} < 0$ significará que está generando (aportando potencia eléctrica al circuito) y cuando en una fuente se obtenga $p_{generada} < 0$ significará que está consumiendo (convirtiendo energía eléctrica en otra forma de energía).

La energía que absorben del circuito los elementos pasivos se puede obtener integrando la potencia. Esto es sencillo sustituyendo la tensión o la corriente por la ecuación de definición del elemento.

Energía (J)	
R	$\int_0^t R \cdot i^2 dt$
L	$\int_0^t L \frac{di}{dt} \cdot i dt = L \frac{[i(t)^2]_0^t}{2}$
C	$\int_0^t C \frac{du}{dt} \cdot u dt = C \frac{[u(t)^2]_0^t}{2}$

6.- Nomenclatura. Convenios de signos

- Las Leyes de Kirchhoff se pueden enunciar de formas distintas pero equivalentes (vease, por ejemplo, CEI 60375). El convenio que utilizamos permite una interpretación intuitiva del comportamiento de cada elemento. Lo mismo ocurre con los sentidos de las flechas.
- Es importante mantener los sentidos de tensiones, fuerzas electromotrices y corrientes que hemos definido para cada elemento pasivo y activo: de esta forma las ecuaciones de definición permanecen y las potencias se determinan tal como se ha indicado.

- Las magnitudes temporales se indicaran normalmente en minúsculas: $e \equiv e(t)$, $i \equiv i(t)$, $p \equiv p(t)$
- Las magnitudes invariable con el tiempo se indicaran normalmente en mayúsculas: E , I , P
- A la relación (u,i) que expresa la ecuación de definición de un elemento pasivo se denomina:

$u = Z \cdot i$	$Z \equiv \text{impedancia } (\Omega)$
$i = Y \cdot u$	$Y \equiv \text{admitancia } (\Omega^{-1})$

Ejemplos:

1.1.1.-Dada una carga eléctrica puntual de 1 C en el vacío, determinar:

- El campo eléctrico que produce a 1 m
- La energía almacenada por unidad de volumen en ese punto

Solución: a) 9×10^9 V/m b) $3,6 \times 10^8$ J/m³

1.1.2.-Una corriente de 1 A circula por un conductor rectilíneo suficientemente largo situado en el vacío. En sus inmediaciones no existen campos eléctricos variables con el tiempo. Determinar:

- El campo magnético que produce a 1 m
- La energía almacenada por unidad de volumen en ese punto

Solución: a) 2×10^{-7} T b) $1,6 \times 10^{-8}$ J/m³

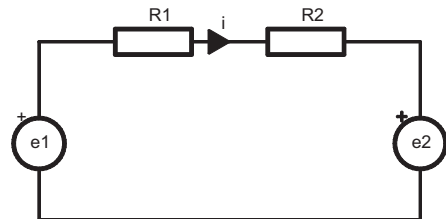
1.2.1.-Un circuito eléctrico está formado por una fuente de fuerza electromotriz: $e = 2$ V y una resistencia: $r_i = 0,02 \Omega$ conectadas en serie, determinar:

- Tensión y corriente en todos los elementos
- Potencia generada en las fuentes y consumida en las cargas
- Energía generada en las fuentes y consumida en las cargas en 3 horas.

Solución: a) $u_{ri} = e = 2$ V, $i_{ri} = i_e = 100$ A b) $P_{\text{cons}, ri} = 200$ W, $P_{\text{gen}, e} = 200$ W
c) Energía consumida, r_i = Energía generada, $e = 600$ W h = 2,16 MJ

1.2.2.-Para el circuito de la figura, determinar:

- Tensión y corriente en todos los elementos
- Potencia generada en las fuentes y consumida en las cargas

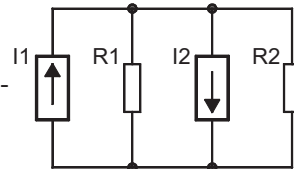


Solución: a) $U_{R1} = 10$ V, $U_{R2} = 40$ V,
 $I_{R1} = I_{R2} = I_{e1} = -I_{e2} = 1$ A
b) $P_{\text{cons}, R1} = 10$ W, $P_{\text{cons}, R2} = 40$ W, $P_{\text{gen}, e1} = 70$ W, $P_{\text{gen}, e2} = -20$ W

$e_1 = 70$ V	$R_1 = 10 \Omega$
$e_2 = 20$ V	$R_2 = 40 \Omega$

1.2.3.-Para el circuito de la figura, determinar:

- Tensión y corriente en todos los elementos
- Potencia generada en las fuentes y consumida en las cargas



Solución: a) $I_{R1} = 7,5$ A, $I_{R2} = 2,5$ A,
 $U_{R1} = U_{R2} = E_{I1} = -E_{I2} = 500$ V
b) $P_{\text{cons}, R1} = 3750$ W, $P_{\text{cons}, R2} = 1250$ W,
 $P_{\text{gen}, I1} = 7500$ W, $P_{\text{gen}, I2} = -2500$ W

$I_1 = 15$ A	$R_1 = 200/3 \Omega$
$I_2 = 5$ A	$R_2 = 200 \Omega$

Problemas:

1.1.3.-Un campo magnético varía linealmente conforme a $B(t) = k \cdot t$ (con $k=1 \text{ T/s}$), determinar:

- Flujo magnético que atraviesa una superficie de 1 m^2 cuyo sentido es paralelo al del campo.
- Fuerza electromotriz en una espira de 1 m^2 orientada en sentido coincidente con el flujo.

Solución: a) $\Phi(T) = t(s)$ b) -1 V

1.1.4.- Un conductor en el vacío es recorrido por una corriente $i(t) = k \cdot t$ (con $k=1 \text{ A/s}$). Alrededor del conductor existe un campo eléctrico en el mismo sentido que la corriente de valor $E(t) = m \cdot t$ (con $m=1 \text{ V/m}\cdot\text{s}$). Determinar la circulación del campo magnético para una trayectoria que incluya al conductor y defina una superficie de 1 m^2 orientada en sentido coincidente con la corriente.

Solución: $\mu_0 \cdot [t + 8,85 \cdot 10^{-12}] \text{ (T}\cdot\text{m)}$

1.1.5.-Para una bobina toroidal de $R=10 \text{ cm}$, $r=1 \text{ cm}$, formada por $N_1=100$ espiras situada en el aire. Determinar:

Cuando la corriente $I=1 \text{ A}$.

- Inducción y flujo magnético dentro y fuera del toroide.
- Energía magnética almacenada en el toroide.

Si la corriente es $i(t) = \cos(100 \pi t)$

- Flujo y fuerza electromotriz (orientada en sentido coincidente con el del flujo)
- Coefficiente de autoinducción L_1 . ¿Depende del valor de la corriente?
- Si se bobina otro devanado de $N_2=1000$ espiras sobre el que ya existe, ¿cual es la fuerza electromotriz en este devanado?

Solución: a) $B_{\text{interior}} = 200 \mu\text{T}$, $\Phi_{\text{interior}} = 6,28 \cdot 10^{-8} \text{ Wb}$, en el exterior son cero

b) $1,56 \cdot 10^{-2} \text{ J/m}^3$, en todo el toroide $3,1 \mu\text{J}$

c) $\Phi(t) = 6,28 \cdot 10^{-8} \cos(100 \pi t) \text{ Wb}$, $e_{1 \text{ espira}} = 1,98 \cdot 10^{-5} \sin(100 \pi t) \text{ V}$, la fuerza electromotriz en todo el devanado es $e_1 = 1,98 \cdot 10^{-3} \sin(100 \pi t) \text{ V}$

d) $L_1 = 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ H}$, no depende de la corriente

e) $e_2 = 1,98 \cdot 10^{-2} \sin(100 \pi t) \text{ V}$

1.1.6.- Resolver el problema anterior cuando el toroide está realizado en material ferromagnético de permeabilidad relativa $\mu_r = 10^4$.

Solución: a) $B_{\text{interior}} = 2 \text{ T}$, $\Phi_{\text{interior}} = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$, en el exterior son cero

b) $159,15 \text{ J/m}^3$, en todo el toroide 31 mJ

c) $\Phi(t) = 6,28 \cdot 10^{-4} \cos(100 \pi t) \text{ Wb}$, $e_1 = 19,8 \sin(100 \pi t) \text{ V}$

d) $L_1 = 6,28 \cdot 10^{-2} \text{ H}$, no depende de la corriente

e) $e_2 = 198 \sin(100 \pi t) \text{ V}$

1.1.7.- Entre dos placas planas paralelas de $S=1 \text{ m}^2$ y separadas $d=0,1 \text{ mm}$ en aire se aplica una $U=100\text{V}$. Considerando despreciables los efectos de borde, determinar:

- a) Campo eléctrico que existe entre las placas
- b) Energía eléctrica almacenada
- c) Carga eléctrica en cada placa

Si la tensión entre placas comienza a oscilar conforme a $u(t)=100\cdot\cos(100\pi t)$

- d) Corriente que circula
- e) Capacidad

Solución: a) 10^6 V/m b) $4,43 \text{ J/m}^3$, en total $4,43\cdot 10^{-4} \text{ J}$

c) $8,85\cdot 10^{-6} \text{ C}$

d) $-2,78\cdot 10^{-3}\cdot\sin(100\pi t)$ que realmente sólo circula por los elementos conductores pero, como es igual al sumando debido a la variación del flujo de campo eléctrico en el aire aislante entre placas, se dice habitualmente que circula entre placas en el sentido de la tensión. e) $88,5 \text{ nF}$

1.1.8.- Resolver el problema anterior cuando el aislante entre placas tiene una constante dieléctrica relativa $\epsilon_r=10$.

Solución: a) 10^6 V/m b) $44,25 \text{ J/m}^3$, en total $4,43\cdot 10^{-3} \text{ J}$

c) $8,85\cdot 10^{-5} \text{ C}$

d) $2,78\cdot 10^{-2}\cdot\sin(100\pi t)$ e) 885 nF

1.1.1.- Demostrar utilizando la geometría del problema 1.1.7, a partir de la definición

de capacidad $C=\frac{q}{u}$, que $C=\epsilon\frac{S}{d}$

1.1.2.- Demostrar utilizando la geometría del problema 1.1.5, a partir de la definición

de inductancia $L=\frac{N\cdot\Phi}{i}$, que $L=\frac{N^2}{Rm}$. Donde $Rm=\frac{l}{\mu\cdot S}$.

Siendo, l : longitud de la línea de campo magnético, S : sección transversal del circuito magnético

1.1.3.- Demostrar utilizando la geometría del problema 1.1.7, a partir de la expresión

de energía por unidad de volumen $W_e=\frac{1}{2}\epsilon E^2(\text{J/m}^3)$, que la energía total es:

$$W_e=\frac{1}{2}CU^2 \text{ (J)}$$

1.1.4.- Demostrar utilizando la geometría del problema 1.1.5, a partir de la expresión

de energía por unidad de volumen $W_m=\frac{1}{2\mu}B^2(\text{J/m}^3)$, que la energía total es:

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2 \text{ (J)}$$

1.3.5.- Considerando un elemento cilíndrico en el que existe un campo eléctrico axial $E = \text{cte}$, demostrar que si el comportamiento del material se ajusta a $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ entonces

$$i = \frac{u}{R}. \text{ Con } R = \frac{l}{\sigma S} \text{ y siendo:}$$

- σ : conductividad ($\Omega \cdot \text{m}$)⁻¹
- j : densidad de corriente (A/mm^2)
- u : $U_1 - U_2$, diferencia de potencial entre extremos del elemento cilíndrico
- l : longitud del elemento cilíndrico
- S : Sección del elemento

1.4.1.- Una espira de cobre ($\sigma = 50 \text{ m}/\Omega \cdot \text{mm}^2$) cerrada de sección $s = 1 \text{ mm}^2$ y radio $R = 1/2\pi \text{ m}$, se encuentra inmersa en un campo magnético uniforme que provoca un flujo interior a la espira de valor $\Phi = 5 \cdot 2 \cdot t(\text{s}) \text{ Wb}$. Determinar para la espira:

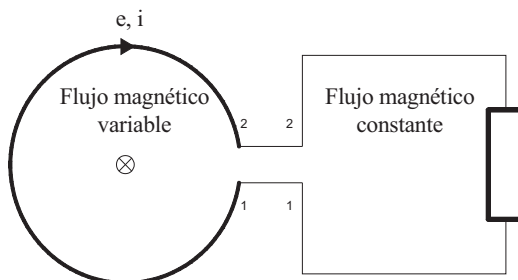
- a) F.e.m.
- b) Campo eléctrico
- c) Densidad de corriente
- d) Corriente
- e) Circuito de elementos ideales que mejor representa este sistema electromagnético.

Solución: a) 2 V b) 2 V/m c) 10^8 A/m
 d) 100 A e) Es el circuito que se ha resuelto en 1.2.1.

1.4.2.- Una espira como la del problema 1.4.1 se conecta en serie con una resistencia $r = 2 \Omega$ cilíndrica de 1 cm de longitud. Determinar:

- a) Corriente que circula
- b) Diferencia de potencial entre 2 y 1
- c) Campo no-conservativo en la espira en sentido coincidente con el flujo
- d) Campo conservativo en la espira en el mismo sentido que el anterior
- e) Campo resultante en la espira
- f) Campo en la resistencia en el mismo sentido que los anteriores

Solución: a) 0,99 A b) $u_{21} = 1,98 \text{ V}$ c) 2 V/m
 d) -1,98 V/m e) 0,02 V/m f) 198 V/m



1.4.3.- Utilizando un modelo de Teoría de Circuitos para el enunciado anterior, determinar:

- a) Corriente que circula
- b) Diferencia de potencial entre 2 y 1

Solución: Obviamente coincide con los resultados anteriores.

1.4.4.- Una espira cuya geometría es idéntica a la del problema 1.4.1, pero cuya conductividad no es conocida, se encuentra inmersa en un campo magnético uniforme que provoca un flujo interior a la espira de valor $\Phi = 5 \cdot 2 \cdot r_i \cdot t$ {flujo en Wb, r_i es la resistencia de la espira en ohmios, tiempo en segundos). Determinar para la espira:

- a) F.e.m.
- b) Corriente
- c) Circuito de elementos ideales que representa mejor este sistema electromagnético.

Solución: a) $2 \cdot r_i \cdot V$ b) $I = 2 \text{ A}$
 c) Una fuente de corriente I en serie con r_i

1.5.1.- Entre conductores de un cable coaxial (esto es, formado por un conductor cilíndrico central y otro exterior tubular concéntrico, separados por un aislante) existe una diferencia de potencial de 100V. Por el conductor central circulan 10 A, que retornan por el conductor exterior. El radio del conductor central es $R_1 = 10 \text{ mm}$. El aislante es 1 mm de PVC ($\mu = \mu_0$, $\epsilon = 3,5 \epsilon_0$). Determinar:

- a) El campo eléctrico en el aislante
- b) La inducción en el aislante
- c) El vector de Poynting $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{B} \text{ (W/m}^2\text{)}$ y la potencia total transmitida a través del aislante

Solución: a) 10^5 V/m b) para $r = 10,5 \text{ mm}$ vale $1,9 \cdot 10^{-4} \text{ T}$.
 c) en $r = 10,5 \text{ mm}$: $p = 15,12 \text{ W/mm}^2$, en total $P = 997,5 \text{ W}$, (aproximación: $B = \text{cte } \forall \text{ radio}$).

La potencia total obtenida como $U \cdot I$ es 1000 W, la diferencia procede de la aproximación de la inducción. La coincidencia es completa si se realiza la

$$\text{integral } P = \int_{R_1}^{R_2} p(r) \cdot dS$$

1.5.2.-Utilizando la geometría del problema anterior, demostrar a partir del vector de Poynting que la potencia $P = U \cdot I$

Ensayos:

Ideas básicas sobre riesgos eléctricos y seguridad

El riesgo es intrínseco a las actividades humanas y lo que denominamos nivel de seguridad aceptable es, fundamentalmente, un compromiso entre el nivel de riesgo admisible y los medios de seguridad que se pueden disponer. La seguridad no es un concepto estático: Por una parte los niveles de riesgo admisibles por una sociedad se modifican con el tiempo y, por otra, los medios de seguridad que se pueden disponer son cada vez mayores conforme se producen innovaciones tecnológicas.

En consecuencia, conviene tener siempre presentes las reglas básicas para mantener en todo momento los niveles de riesgo en los valores más bajos posibles:

- 1º Identificar todos los riesgos.
- 2º Valorar la importancia de cada riesgo.
- 3º Actuar para eliminar el riesgo o reducir los daños que puede provocar:
Disponer las medidas de seguridad.
- 4º Realizar un seguimiento apropiado de los resultados obtenidos.
- 5º Mejorar de forma continua, conforme las innovaciones tecnológicas lo permitan, los niveles de seguridad.

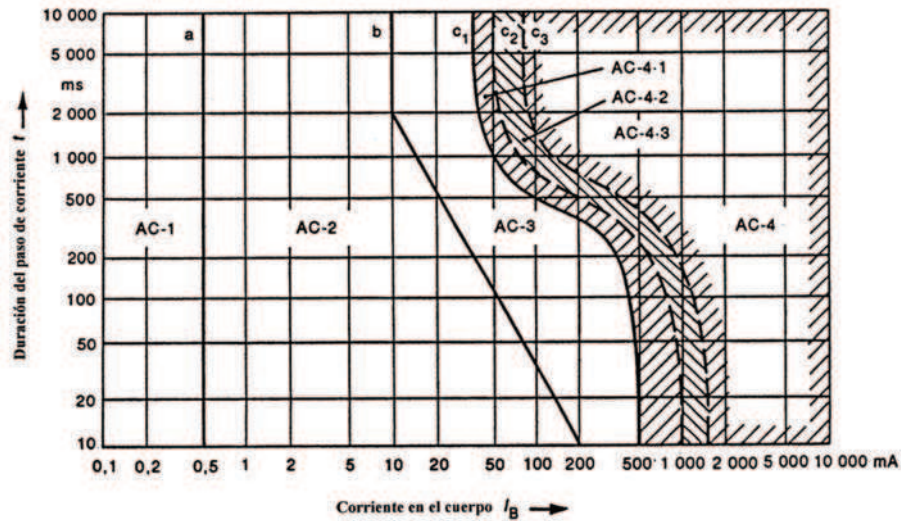
a) Peligros de la energía eléctrica

La corriente eléctrica, al atravesar el cuerpo humano, puede provocar numerosos efectos: contracciones musculares involuntarias, daños en el sistema nervioso, quemaduras, etc. Cuando los daños afectan a la respiración, al funcionamiento del corazón o de otro sistema vital puede sobrevenir la muerte por electrocución.

Los accidentes más frecuente al utilizar energía eléctrica son el electrochoque (cuando la corriente eléctrica atraviesa el cuerpo humano) o las quemaduras motivadas por la proyección de los fragmentos incandescentes que aparecen producto de cortocircuitos o de arcos. En muchos otros casos, es el movimiento brusco involuntario que se produce como consecuencia del electrochoque el que provoca los daños (caídas desde gran altura, atrapamiento en máquinas en movimiento, etc). Desgraciadamente se producen miles de accidentes eléctricos cada año.

El efecto directo de la corriente sobre el cuerpo humano es variable para cada sujeto, pero depende del valor de la corriente, de la duración del contacto y de la frecuencia de

la corriente. Para frecuencias industriales se han obtenido¹ los valores medios que se adjuntan.



AC-1	ninguna reacción
AC-2	ningún efecto peligroso
AC-3	contracciones musculares, dificultades de respiración, perturbación de impulsos cardíacos
AC-4	paradas cardíacas, quemaduras graves en órganos internos. Probabilidad (1)<5%, (2)<50%, (3)>50%

El valor de la corriente que atraviesa un cuerpo depende de la diferencia de potencial (o tensión de contacto, U_c) entre los puntos de entrada y salida de la corriente y de la resistencia (o impedancia en corriente alterna, Z_c) que ofrece el cuerpo entre esos dos puntos. El valor de esta impedancia es distinto para cada persona, pero depende de los puntos de entrada y salida de corriente, de la propia tensión de contacto y, para tensiones pequeñas, de las condiciones de contacto de la piel (superficie, presión, humedad). Como valores de referencia se establecen, en algunas normas, 2500 Ω en baja tensión (hasta 1000 V) y 1000 Ω en alta tensión.

⁽¹⁾ IEC/TS 60479.1

$$I_B = \frac{U_c}{Z_i}$$

Se denomina *contacto directo* cuando la tensión de contacto (U_c) aparece bien porque se tocan simultáneamente dos conductores activos¹ de la instalación, bien porque se toca un conductor activo y el suelo². Se denomina *contacto indirecto* cuando la tensión de contacto aparece al tocar simultáneamente dos elementos pasivos (esto es, entre los que no debería existir diferencia de potencial ,por ejemplo: una estructura metálica y el suelo).

Para el cuerpo humano no existe diferencia entre encontrarse sometido a uno u otro tipo de contacto (más allá de la distinta resistencia Z_i que cada camino presenta o la peligrosidad distinta que cada trayecto de la corriente por el interior del cuerpo supone) pero respecto a los medios de protección las diferencias son muy importantes.

b) Medios de protección

La protección frente a contactos directos recae exclusivamente en su eliminación: bajo ninguna circunstancia deben tocarse elementos activos de la instalación. Para conseguir esto, los elementos activos se encuentran suficientemente alejados de nuestro alcance o están recubiertos de materiales eléctricamente aislantes. Debe destacarse que los daños que sufre una persona en caso de contacto directo no pueden limitarse por ningún medio intrínseco a la instalación. Dependen exclusivamente de factores tan impredecibles como el camino que sigue la corriente al circular por el cuerpo humano, la posibilidad de liberarse del contacto, el estado de la piel, etc.

La protección frente a contactos indirectos se realiza uniendo eléctricamente todos los elementos pasivos de la instalación (estructuras metálicas, envolventes metálicas de los equipos eléctricos, el suelo, etc). A esta unión equipotencial se le denomina habitualmente puesta a tierra de masas. Además, suele ser necesario utilizar un elemento que detecte que se ha producido un defecto en la instalación que podría originar un contacto indirecto y que desconecte el circuito afectado. El elemento más utilizado se denomina dispositivo de corriente residual o interruptor diferencial. Los defectos que pueden dar lugar a contactos indirectos son detectados y desconectados por la propia instalación sin daño para las personas.

⁽¹⁾ Es decir dos conductores que normalmente están sometidos a tensión eléctrica

⁽²⁾ En la mayoría de instalaciones eléctricas los conductores activos se encuentran a un potencial peligroso respecto al suelo, paredes y demás elementos conductores unidos a éstos.

2

MEDIDA DE MAGNITUDES ELÉCTRICAS

- 1.- Valor instantáneo, medio y eficaz*
- 2.- Errores de medida*
- 3.- Medida de tensiones, intensidades y resistencias*
- 4.- Medida de potencia y energía*

1.- Valor instantáneo, medio y eficaz

Dada una función de valor instantáneo $a(t)$, se define su valor eficaz (o valor rms) como:

$$A_{\text{eficaz}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a(t)^2 dt}$$

La definición proviene de que una corriente alterna de valor eficaz I produce el mismo efecto térmico en una resistencia que una corriente continua constante de valor I^1 .

El periodo de integración (T) puede coincidir con el periodo de la función, pero, habitualmente, incluye un número elevado de ciclos de la función.

El valor medio de la función es:

$$A_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt$$

En este caso, (T) es el periodo de integración para el que se ha obtenido el valor medio.

2.- Errores de medida

Se denomina error de medida a la diferencia entre el valor medido y un valor de referencia que puede ser la lectura de un equipo patrón o el valor verdadero.

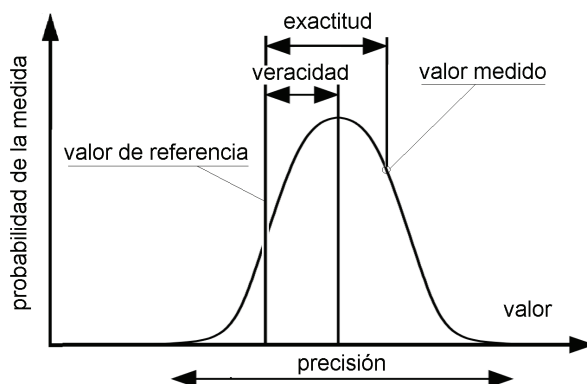
Es necesario diferenciar entre:

- a) Exactitud: Proximidad entre el valor medido y el valor verdadero.

$$^{(1)} W = \int_0^T R \cdot i(t)^2 \cdot dt = R \cdot I^2 \cdot T$$

- b) **Precisión:** Proximidad entre los valores medidos obtenidos en mediciones repetidas de un mismo objeto.
- c) **Veracidad:** Proximidad entre la media de un número infinito mediciones realizadas y el valor de referencia.

El valor real de la magnitud se encuentra dentro de un intervalo definido por la lectura ofrecida por el equipo de medida y su error absoluto máximo. Este intervalo se define habitualmente mediante un término fijo y otro término proporcional a la lectura, por ejemplo:



ESCALA	RESOLUCIÓN	PRECISIÓN
200 mV	0,1 mV	$\pm (0,5 \% \text{ lectura} + 1 \text{ dígito})$
2 V	1 mV	$\pm (0,5 \% \text{ lectura} + 1 \text{ dígito})$
20 V	10 mV	$\pm (0,5 \% \text{ lectura} + 1 \text{ dígito})$
200 V	0,1 V	$\pm (0,5 \% \text{ lectura} + 1 \text{ dígito})$
1000 V	1 V	$\pm (0,8 \% \text{ lectura} + 2 \text{ dígitos})$

La *clase* de un instrumento o de un sistema de medida suele utilizarse para indicar un nivel de exactitud requerido para satisfacer determinados requisitos metrológicos. Se designa por un índice de clase que corresponde al límite superior del error de la magnitud medida expresado en porcentaje de la magnitud asignada.

3.- Medida de tensiones, intensidades y resistencias

Amperímetro: Es un instrumento que permite medidas de corriente eléctrica. Se instala siempre en serie con el elemento cuya intensidad se desea conocer. Como interesa que su influencia sobre el circuito sea mínima, la caída de



tensión en este aparato debe ser lo más pequeña posible por lo que su resistencia interna siempre es muy baja (del orden de décimas de ohmio para corrientes de algunos amperios)

En medidas de corrientes continuas (valor medio de la corriente) los amperímetros indican un signo que informa del sentido de la corriente respecto al que el propio aparato tiene definido como positivo. En general, en los esquemas interesará dibujar el aparato de medida junto con el sentido positivo interno. En medidas de corrientes alternas (valor eficaz de la corriente) no aparece indicación de signo.

Voltímetro: Es un instrumento que realiza medidas de tensión eléctrica (diferencia de potencial entre dos puntos). Se instala siempre en paralelo con el elemento cuya tensión se desea conocer. En este caso, para que su influencia sobre el circuito sea pequeña, interesa que la corriente consumida por el aparato sea pequeña por lo que la resistencia interna debe ser muy elevada (del orden de decenas de megaohmios). Las consideraciones sobre signos realizadas para el amperímetro siguen siendo válidas para el voltímetro.



Óhmetro: Se utiliza para medidas de resistencia eléctrica. La medición la realiza inyectando una corriente sobre el elemento al que se conecta, midiendo tanto tensión como intensidad y realizando internamente el cociente. Como sólo pueden medir resistencias reales no ofrecen indicación de signo.



Multímetro (polímetro): Las tres funciones básicas enunciadas, e incluso otras, se encuentran integradas en este tipo de aparato que permite medidas tanto en corriente continua como en alterna y dispone de diferentes escalas de medidas. Las indicaciones realizadas sobre signos son plenamente válidas.

Vatímetro y vármetero: Son instrumentos que realizan medidas de potencia eléctrica. Están constituidos por dos elementos: uno de medida de corriente, que se conecta en serie con el receptor o generador cuya potencia consumida o generada se desea



conocer, y otro de medida de tensiones, que se conecta en paralelo con el mismo.

Medidores integrados: Son equipos que realizan, además de la medida de tensiones y corrientes como los multímetros, la medida de potencia, energía, factor de potencia, distorsión armónica y otras magnitudes eléctricas.

Osciloscopio: Permite la visualización en una pantalla de la tensión instantánea entre dos puntos de un circuito. El eje de abscisas es habitualmente el tiempo, pudiéndose ajustar la escala (o base) de tiempos a voluntad desde, por ejemplo, microsegundos hasta segundos. El eje de ordenadas es la diferencia de potencial (tensión) que existe en cada instante entre los dos puntos que se están midiendo y su escala puede también ajustarse a voluntad.

Medidores para aplicaciones específicas: En algunas aplicaciones las magnitudes presentan valores que requieren la utilización de equipos de medida especialmente diseñados, por ejemplo para determinar la resistencia de aislamiento en los que es preciso utilizar tensiones de medida elevadas se utiliza un megóhmetro. En otros casos, los medidores específicos facilitan la realización de medidas de forma normalizada, por ejemplo los comprobadores de instalaciones.

Por razones de seguridad (por ejemplo para medir en alta tensión) o de simplicidad (por ejemplo para medir corrientes muy elevadas) en ocasiones se adapta la magnitud real a otro valor más apropiado. Esto se consigue intercalando entre el circuito a medir y el equipo de medida divisores de tensión o corriente, válido tanto para medidas en continua como en alterna, o transformadores de medida, válido sólo en alterna.

Ejemplos:

2.1.1.- La tensión instantánea en una base de enchufe es $u(t) = 325,3 \cos(100 \pi t)$ { u en voltios, t en segundos}, determinar:

- a) El valor de la tensión en el instante $t = 1$ segundo
- b) Periodo de la función
- c) La indicación de un voltímetro en una escala de corriente continua
- d) El valor eficaz de la función
- e) La indicación de un voltímetro en una escala de corriente alterna

Solución: a) $u(t=1) = 226,6 \text{ V}$ b) $T = 20 \text{ ms}$ c) Es el valor medio de la función, $V = 0$

$$\text{d) } U_{\text{eficaz}} = \frac{325,3}{\sqrt{2}} = 230 \text{ V} \quad \text{e) Indica (eficaz)-(medio), } V = 230 \text{ V}$$

2.1.2.- Si la corriente que circula por un amperímetro es $i(t) = 200 + 325,3 \cos(100 \pi t)$ { i en amperios, t en segundos, repetir los apartados del problema anterior.

Solución: a) $i(t=1) = 426,6 \text{ V}$ b) $T = 20 \text{ ms}$ c) Indica el valor medio, $A = 200 \text{ A}$

$$\text{d) } I_{\text{eficaz}} = 200 + \frac{325,3}{\sqrt{2}} = 430 \text{ A} \quad \text{e) Indica (eficaz)-(medio), } A = 230 \text{ A}$$

2.2.1.- La documentación de un voltímetro indica que el error de medida es: $\pm(0,2\% \text{ de la lectura} + 1 \text{ dígito})$. Determinar el intervalo en el que se encuentra el valor real de la tensión si la lectura es:

- a) 1,235 V b) 1,24 V c) 1,2 V

Solución: a) $\epsilon = \pm 3,47 \cdot 10^{-3} \text{ V}$ que es el 0,28% de la lectura. El valor real $\in [1,233; 1,237] \text{ V}$

b) $\epsilon = \pm 12,48 \cdot 10^{-3} \text{ V}$, el 1,0% de la lectura. El valor real $\in [1,23; 1,25] \text{ V}$

c) $\epsilon = \pm 102,4 \cdot 10^{-3} \text{ V}$, el 8,5% de la lectura. El valor real $\in [1,1; 1,3] \text{ V}$

2.3.1.- Un voltímetro de resistencia interna $R_v = 10 \text{ M}\Omega$ se utiliza para medir la tensión aplicada a un receptor que consume $I = 1 \text{ A}$. Si el voltímetro indica 250 V, determinar:

- a) La corriente que consume el voltímetro
- b) El valor relativo de la corriente del voltímetro respecto de la corriente del receptor

Solución: a) $i_v = 25 \mu\text{A}$ b) 0,0025 %, inapreciable con la precisión habitual

2.3.2.- Un amperímetro de resistencia interna $R_A = 0,2 \Omega$, se utiliza para medir la corriente que circula por un receptor que se alimenta a 100 V. Si el amperímetro indica 2 A, determinar:

- a) La tensión en el amperímetro
- b) El valor relativo de la tensión en el amperímetro respecto de la tensión del receptor

Solución: a) $u_A = 0,4 \text{ V}$ b) 0,4 %, similar a los errores de los aparatos de medida

2.3.3.- El voltímetro del problema 2.3.1 se utiliza para medir la tensión en un condensador que, debido a que el aislante que separa las placas no es ideal, consume 5 μA cuando se encuentra completamente cargado. Si en esta situación el voltímetro marca 25 V, determinar:

- a) El valor relativo de la corriente del voltímetro respecto de la corriente del receptor
- b) Si la corriente del condensador se mide utilizando un amperímetro de resistencia interna $R_A = 100 \Omega$, para que el error cometido al considerar la lectura de los aparatos igual a la tensión y corriente en el condensador ¿el amperímetro debería situarse antes o después del voltímetro?

Solución: a) Consume 2,5 μA que es un 50% de la corriente del condensador
b) La tensión en el amperímetro es un 0,002% de la tensión en el condensador: es mejor situarlo después del voltímetro.

Ensayos:

2.1.- Medida de resistencia eléctrica

a) Medida de la resistencia de un receptor eléctrico

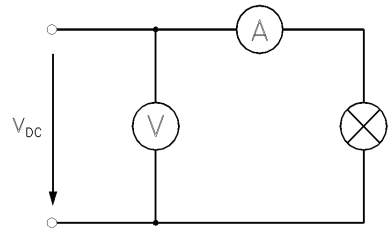
Se medirá con un óhmetro el valor de una resistencia R .

b) Medida de la resistencia interna de amperímetros y voltímetros

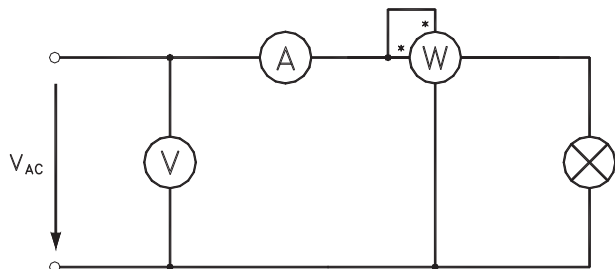
Se medirá con un óhmetro el valor de la resistencia interna de un amperímetro en la escala de 2 A. Análogamente se medirá la resistencia interna de un voltímetro en la escala de 200V.

2.2.- Medida de tensiones, corrientes y potencias

Se medirá la tensión, la corriente y la potencia suministrada por una fuente a un receptor. Como siempre, es preciso verificar que la tensión indicada en la placa de características del receptor, una bombilla (o lámpara incandescente) en este caso, coincida con la tensión nominal (asignada) de la fuente. ¿Cuál es, a priori, la escala apropiada para cada una de las medidas?



- Considerando los valores obtenidos de resistencia interna del amperímetro y del voltímetro y sus lecturas, ¿Qué corriente consume el voltímetro en ese ensayo? ¿Qué caída de tensión provoca el amperímetro en ese ensayo? ¿Afectan apreciablemente al circuito?
- Con las escalas elegidas ¿de qué orden de magnitud es el error de medida de la tensión y de la corriente?



3 RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS

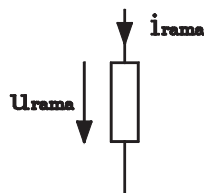
- 1.-Topología de circuitos*
- 2.-Ecuaciones independientes*
- 3.-Resolución por mallas*
- 4.-Resolución por nudos*
- 5.- Solución general de circuitos*

1.- Topología de circuitos

La topología estudia las propiedades de los sistemas con independencia de su tamaño o forma. En este apartado se definen algunos conceptos topológicos desde el punto de vista de los Circuitos Eléctricos.

Rama: es una parte de un circuito definida por una pareja de valores {tensión, corriente}. Esto implica que debe tener únicamente dos extremos.

Nudo: punto de confluencia de dos o más ramas.



Los elementos o las ramas pueden estar conectados entre sí:

en serie: cuando la corriente que circula por ellos es siempre la misma.

en paralelo: cuando la tensión que existente en ellos es siempre la misma.

Terminología:

Circuito conexo: aquel en el que partiendo de cualquier nudo se puede llegar a los demás

Lazo: línea cerrada formada con ramas

Malla: lazo que no contiene ningún otro en su interior

Árbol: conjunto de ramas conexas que, sin formar lazos, contiene todos los nudos. En un circuito se pueden definir múltiples árboles.

Ramas del árbol: n° de nudos $(n) - 1$, porque cada rama define un nuevo nudo, excepto la primera que define dos

Eslabón: ramas que no están en el árbol.

$$n^{\circ} \text{ de eslabones} = n^{\circ} \text{ de ramas} - n^{\circ} \text{ de ramas del árbol} = r - (n-1)$$

Como cada eslabón proporciona un lazo $\Rightarrow n^{\circ}$ de lazos = n° de eslabones

2.- Ecuaciones independientes

En cualquier circuito conexo de (n) nudos y (r) ramas existen $\{r-(n-1)\}$ lazos. Así, el número de ecuaciones que pueden escribirse es $(2r+1)$, mientras que el de incógnitas es $(2r)$.

En realidad, el número de ecuaciones independientes es $(2r)$ porque todas las ecuaciones de lazo son independientes (cada lazo incorpora un nuevo eslabón) y todas las ecuaciones de rama son independientes, pero una de las ecuaciones de nudo es siempre suma de las restantes¹.

En general, el sistema es resultante es compatible y determinado².

Ecuaciones		
de nudo (1ª LdK)	n	$\sum i_{\text{entrantes}} = \sum i_{\text{salientes}}$ $\forall$ nudo
de lazo (2ª LdK)	$r - (n - 1)$	$\sum u = \sum e$ $\forall$ lazo
de rama (ec. de definición)	r	$u_{\text{rama}} = Z_{\text{rama}} \cdot i_{\text{rama}}$ $i_{\text{rama}} = Y_{\text{rama}} \cdot u_{\text{rama}}$ $e = cte, i = cte, \dots$
Total:	$2r + 1$	
Incógnitas		
(u, i) de cada rama	$2r$	

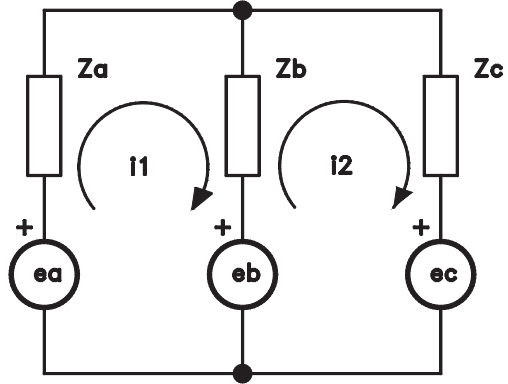
La resolución directa mediante la escritura de todas estas ecuaciones es el procedimiento más general, pero en muchas ocasiones puede sistematizarse para que resulte aún más sencillo.

⁽¹⁾ Es fácil comprobarlo definiendo un volumen cerrado que deje fuera un único nudo, las corrientes entrantes en el nudo son las corrientes salientes del volumen cerrado y viceversa.

⁽²⁾ Solo deja de serlo cuando numéricamente coinciden dos ecuaciones o cuando resulta imposible satisfacer simultáneamente dos de ellas, pero esta situación nunca se da en circuitos eléctricos reales.

3.- Resolución por mallas

Consideremos, por ejemplo, el circuito de la figura formado por 3 ramas (fuente de tensión en serie con impedancia) y 2 nudos. Una rama cualquiera es el árbol del circuito y las dos restantes son los eslabones que definen las ecuaciones de lazo, además, resulta obvio que la ecuación del nudo superior es la misma que la del nudo inferior.



Si se consideran las ecuaciones de lazo de todas las mallas escritas en el mismo sentido (por ejemplo horario):

$$\text{malla 1: } e_a - e_b = Z_a \cdot i_1 + Z_b \cdot (i_1 - i_2)$$

$$\text{malla 2: } e_b - e_c = Z_b \cdot (i_2 - i_1) + Z_c \cdot i_2$$

Fijémonos que en estas ecuaciones se ha incluido también la ecuación de nudo (para obtener la corriente en la rama b) y las ecuaciones de definición de cada elemento ($e = cte$, $u = Z \cdot i$). El resultado es la simplificación, por sustitución, del sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas que resultaría aplicando el procedimiento general a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (las corrientes de malla i_1 e i_2).

Este sistema puede adoptar una forma matricial que facilite su resolución:

$$\text{malla 1: } e_1 = Z_{11} \cdot i_1 + Z_{12} \cdot i_2$$

$$\text{malla 2: } e_2 = Z_{21} \cdot i_1 + Z_{22} \cdot i_2$$

Siendo:

$$e_1 = e_a - e_b$$

suma de fuerzas electromotrices de las fuentes de la malla 1

$e_2 = e_b - e_c$	suma de fuerzas electromotrices de las fuentes de la malla 2
$Z_{11} = Z_a + Z_b$	impedancia propia de la malla 1
$Z_{22} = Z_b + Z_c$	impedancia propia de la malla 2
$Z_{12} = Z_{21} = -Z_b$	impedancia común a las mallas 1 y 2

Así, en general, el método de mallas consiste en resolver un sistema matricial que se plantea directamente a partir del circuito, en el que las incógnitas son las corrientes de malla y los datos las impedancias propias y comunes y las fuerzas electromotrices:

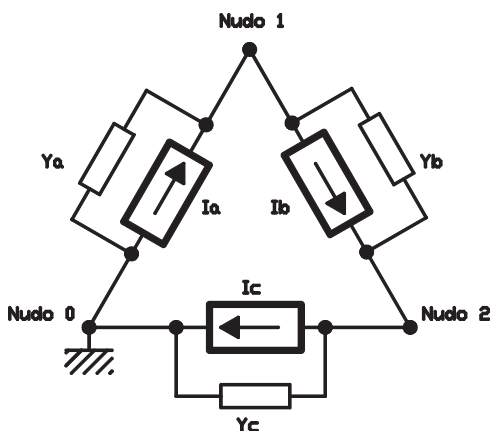
$$[e]_{(r-n+1) \times 1} = [Z]_{(r-n+1) \times (r-n+1)} \cdot [i]_{(r-n+1) \times 1}$$

Conocidas las corrientes de malla resulta sencillo obtener cualquier otra magnitud del circuito (tensiones en los elementos, potencias, ...). Debe notarse que para que la aplicación de este método sea rápida es necesario que todas las fuerzas electromotrices de las fuentes sean conocidas, tal como es normal en las fuentes de tensión.

4.- Resolución por nudos

Es el método recíproco al de mallas. Proporciona las tensiones de todos los nudos del circuito respecto a uno de referencia, conocidas las intensidades que suministran todas las fuentes de potencia y las admitancias de todos los elementos pasivos del circuito.

Consideremos, por ejemplo, el circuito de la figura formado por 3 ramas (fuente de corriente en paralelo con admitancia) y 3 nudos. Dos ramas



cualesquiera forman el árbol del circuito y la rama restante es el eslabón que define la única ecuación de lazo, además, es sencillo comprobar que la ecuación de, por ejemplo, el nudo inferior izquierdo es la suma de las ecuaciones de los otros dos nudos.

Si se consideran las ecuaciones de los nudos independientes 1 y 2, escribiendo la 1ª Ley de Kirchhoff como:

$$\sum i_{\text{entrantes por fuentes de potencia}} = \sum i_{\text{salientes por admitancias}} \quad \forall \text{ nudo}$$

denominando u_1 y u_2 a las tensiones de los nudos respecto al nudo 0, se obtiene:

$$\text{nudo 1: } i_a - i_b = Y_a \cdot u_1 + Y_b \cdot (u_1 - u_2)$$

$$\text{nudo 2: } i_b - i_c = Y_b \cdot (u_2 - u_1) + Y_c \cdot u_2$$

De nuevo en estas ecuaciones se ha incluido también la ecuación de lazo (para obtener la tensión en la rama b) y las ecuaciones de definición de cada elemento ($I = \text{cte}$, $i = Y u$). El resultado es también la simplificación, por sustitución, del sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas que resultaría aplicando el procedimiento general a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (las tensiones de nudo u_1 y u_2).

También este sistema puede adoptar una forma matricial que facilite su resolución:

$$\text{nudo 1: } i_1 = Y_{11} \cdot u_1 + Y_{12} \cdot u_2$$

$$\text{nudo 2: } i_2 = Y_{21} \cdot u_1 + Y_{22} \cdot u_2$$

Siendo:

$i_1 = i_a - i_b$ suma de corrientes aportadas por las fuentes al nudo 1

$i_2 = i_b - i_c$ suma de corrientes aportadas por las fuentes al nudo 2

$Y_{11} = Y_a + Y_b$ admitancia propia del nudo 1

$Y_{22} = Y_b + Y_c$ admitancia propia del nudo 2

$Y_{12} = Y_{21} = -Y_b$ admitancia común a los nudos 1 y 2

Así, el método de nudos consiste en resolver un sistema matricial que se plantea directamente a partir del circuito, en el que las incógnitas son las tensiones de nudo y los datos son las admitancias propias y comunes y las corrientes de las fuentes:

$$[i]_{(n-1) \times 1} = [Y]_{(n-1) \times (n-1)} \cdot [u]_{(n-1) \times 1}$$

Conocidas las tensiones de nudo resulta sencillo obtener cualquier otra magnitud del circuito (corrientes en los elementos, potencias, ...). Debe notarse que para que la aplicación de este método sea sencilla es necesario que todas las corrientes aportadas por las fuentes sean conocidas.

5.- Solución general de circuitos

En los circuitos en los que los valores de las fuentes son invariables con el tiempo y los elementos pasivos son únicamente resistencias, la solución se obtiene de forma inmediata aplicando los procedimientos anteriores. Sin embargo, en la mayoría de circuitos intervienen bobinas y condensadores, cuyas ecuaciones de definición incluyen derivadas temporales, y no todas las fuentes son invariables. Se requiere entonces aplicar a los procedimientos anteriores las herramientas habituales para resolver sistemas de ecuaciones integro-diferenciales¹.

En los circuitos eléctricos, igual que en cualquier otro sistema físico², cuando las magnitudes (tensiones, corrientes, ...) no dependen del tiempo se dice que se encuentra en *régimen permanente o estacionario*. Normalmente la evolución desde un régimen permanente inicial a otro régimen permanente final distinto requiere la variación temporal de las magnitudes, esto es, la aparición de un *régimen transitorio*. Algunos sistemas físicos nunca llegan a alcanzar un régimen permanente porque sus condiciones son cambiantes.

⁽¹⁾ En el Anexo 3B se ha incluido un breve recordatorio.

⁽²⁾ Mecánico, térmico, hidráulico, ... Para poder comparar con los circuitos eléctricos, se han incluido algunos ejemplos en el Anexo.3A

La resolución de circuitos en régimen permanente es mucho más simple que la resolución de los procesos transitorios. Afortunadamente, en las aplicaciones habituales, el régimen que interesa conocer con precisión es el permanente, pero no debe olvidarse la existencia de regímenes transitorios ni las características básicas de éstos para poder garantizar que el circuito funcionará correctamente siempre.

5.1.- Régimen permanente con fuentes constantes

En régimen permanente (esto ocurre normalmente cuando el circuito ha permanecido largo tiempo sin ser modificado) es razonable esperar que, si las fuentes son constantes, las tensiones y las corrientes en todos los elementos sean también constantes. Esto implica que en el análisis en esta situación sólo intervienen las fuentes y las resistencias¹.

R	$U_R = R \cdot I_R$	sigue siendo R
L	$U_L = L \cdot \frac{dI_L(\text{constante})}{dt} = 0$	equivale a un interruptor cerrado 
C	$I_C = C \cdot \frac{dU_C(\text{constante})}{dt} = 0$	equivale a un interruptor abierto 

5.2.- Régimen estacionario con fuentes sinusoidales

Cuando las fuentes son, tal como las del Sistema Eléctrico de Potencia, sinusoidales (por ejemplo una función coseno de una constante, ω , por el tiempo) debemos esperar que finalmente todas las tensiones y corrientes sean también sinusoidales. Esto no es

⁽¹⁾ Para representar correctamente las bobinas y condensadores, debe recordarse que un interruptor cerrado presenta idealmente resistencia cero mientras que un interruptor abierto presenta resistencia infinita (y no deja circular corriente)

propiamente un régimen permanente, pero su evolución periódica estacionaria permite un análisis sencillo:

R	si $i_R(t) = I_{máx} \cdot \cos(\omega \cdot t) \Rightarrow$	$u_R(t) = R \cdot I_{máx} \cdot \cos(\omega \cdot t) = U_{máx} \cdot \cos(\omega \cdot t)$
L	si $i_L(t) = I_{máx} \cdot \cos(\omega \cdot t) \Rightarrow$	$u_L(t) = -L \cdot I_{máx} \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) = U_{máx} \cdot \cos(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$
C	si $u_C(t) = U_{máx} \cdot \cos(\omega \cdot t) \Rightarrow$	$i_C(t) = -C \cdot U_{máx} \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) = I_{máx} \cdot \cos(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$

5.3.- Continuidad

En los elementos pasivos ideales existen restricciones de continuidad de algunas magnitudes. Podemos comprobarlo a partir de la energía que absorben del circuito. La energía es siempre una función continua porque, en caso contrario, sería necesario aportar una potencia infinita¹, así:

R	$W = \int_0^t u \cdot i \cdot dt$	aunque (u) e (i) sean discontinuas, la energía sigue siendo continua.	sin restricciones
L	$W = L \frac{i(t)^2}{2}$	la corriente debe ser continua para que la energía sea continua	$i_L(t^+) = i_L(t^-)$
C	$W = C \frac{u(t)^2}{2}$	la tensión debe ser continua para que la energía sea continua	$u_C(t^+) = u_C(t^-)$

⁽¹⁾ Esta situación también ocurre habitualmente con la velocidad de los objetos: es continua porque la energía cinética $W_c = m \frac{v(t)^2}{2}$ debe ser continua

5.4.- Régimen transitorio

Los regímenes transitorios aparecen en muchas situaciones normales: en muchos casos son el *punte* entre dos regímenes permanentes distintos. El estudio riguroso del régimen transitorio requiere la utilización de procedimientos de cálculo como los que se describen en la Anexo 3B, pero en muchos casos es suficiente con analizar los regímenes permanentes inicial y final para conocer la forma que tendrá el transitorio:

1º. Valores iniciales:

El transitorio se inicia cuando se modifica cualquier elemento del circuito (el valor de una impedancia, el estado de un interruptor, ...). Este instante inicial se considera habitualmente el origen de tiempos, denominándose ($t=0^+$) al instante justo después de la modificación del circuito y ($t=0^-$) al instante previo. La situación previa debe ser conocida (por ejemplo, un régimen permanente que se resuelve con facilidad), así las tensiones y corrientes en cada elemento en ($t=0^+$) se determinan resolviendo el circuito considerando las condiciones de continuidad desde ($t=0^-$).

2º. Valores finales:

Si, como es habitual, el punto final es un nuevo régimen permanente ($t \rightarrow \infty$), su solución se obtiene fácilmente resolviendo el circuito considerando el comportamiento de los elementos pasivos en esta situación.

3º. Forma del transitorio:

El aspecto de las tensiones y corrientes en los elementos del circuito a lo largo del transitorio puede conocerse a partir de las raíces que se obtengan en el *polinomio característico* (si se utiliza el Método del Operador D) o en el polinomio $D(p)$ (si se utiliza la Transformada de Laplace). Pueden darse dos situaciones:

- Que sean *raíces reales*:
En este caso serán siempre negativas, lo que significa que el transitorio es una función exponencial que une los valores iniciales con los valores finales.
- Que sean *raíces complejas*:
En este caso, como la solución física es necesariamente real, aparecen siempre parejas de raíces complejas conjugadas ($p_1 = -a + j \omega$) y ($p_2 = -a - j \omega$). La simplificación del sumatorio de estas exponenciales muestra que el transitorio es una senoide amortiguada (e^{-at}) de velocidad angular ω .

En los sistemas eléctricos la parte real de las raíces es negativa por lo que el régimen transitorio desaparece al cabo de poco tiempo. Convencionalmente se considera que el transitorio finaliza cuando la diferencia entre el valor instantáneo de las tensiones e intensidades y el valor final de estas magnitudes es inferior a 0,67% de la diferencia entre el valor inicial y el final. Al 20% de este tiempo se le denomina τ , constante de tiempo del circuito (o, expresado al revés: se considera que el transitorio en los sistemas eléctricos dura 5τ). En el caso simple de circuitos con una sola raíz real $\tau = \frac{1}{p_1}$.

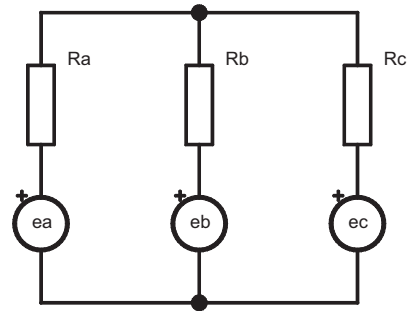
Ejemplos:

3.1.1.- Para el circuito de la figura,

- Determinar las ramas y los nudos
- Determinar las ecuaciones independientes de que se dispone

Solución: a) La solución más simple es considerar cada asociación en serie como una rama: hay tres. Se tienen entonces, dos nudos uno arriba y otro abajo.

b) 3 de rama, 1 de nudo, 2 de lazo de tensiones.

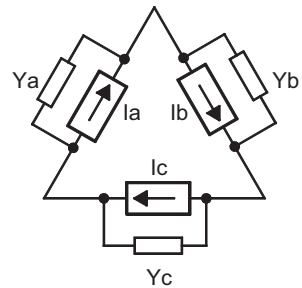


3.1.2.- Para el circuito de la figura,

- Determinar las ramas y los nudos
- Determinar las ecuaciones independientes de que se dispone

Solución: a) La solución más simple es considerar cada asociación en paralelo como una rama: hay tres. Se tiene, entonces, tres nudos uniendo las ramas, uno en cada vértice.

b) 3 de rama, 2 de nudo, 1 de lazo de tensiones.

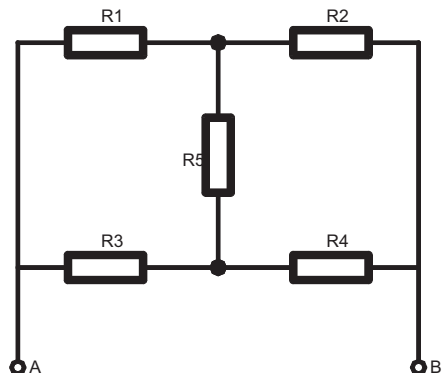


3.3.1.- Resolver por mallas el circuito 3.1.1.

Solución: La corriente en la malla izquierda es $i_1 = -0,100$ A, en la malla derecha es $i_2 = -0,650$ A. Resolviendo cualquiera de las tres ramas: la tensión entre el nudo de arriba y el de abajo resulta 10,5 V. La potencia consumida entre las tres resistencias es 15,75 W, que coincide con la suma de las potencias generadas por las fuentes (teniendo en cuenta los signos: algunas fuentes están consumiendo potencia)

$e_a = 10$ V	$R_a = 5$ Ω
$e_b = 5$ V	$R_b = 10$ Ω
$e_c = 30$ V	$R_c = 30$ Ω

3.3.2.- El dipolo de la figura se alimenta con una fuente de tensión de 100 V. El borne positivo de la fuente se ha conectado al borne A del dipolo. El valor de cada resistencia



coincide con el número que la identifica. Determinar la corriente y la tensión en cada elemento.

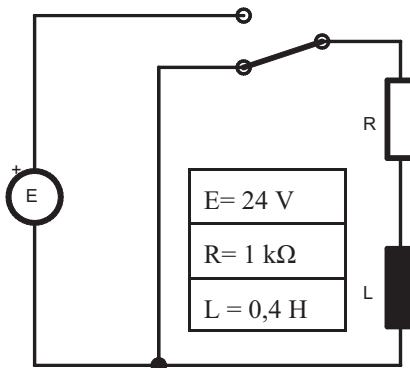
Solución: $I_E = 47,7$ A, en el sentido de E. En las resistencias, considerando sentido positivo hacia la derecha y hacia abajo, $I_{R1} = 34,2$ A, $I_{R2} = 32,9$ A, $I_{R3} = 13,5$ A, $I_{R4} = 14,8$ A, $I_{R5} = 1,3$ A, $U_{R1} = 34,2$ V, $U_{R2} = 65,8$ V, $U_{R3} = 40,6$ V, $U_{R4} = 59,4$ V, $U_{R5} = 6,5$ V. La fuente genera 4774 W, que coincide con la suma de las potencias consumidas en las resistencias.

3.4.1.- Resolver por nudos el circuito del problema 3.1.2.

Solución: La tensión entre el nudo superior (1) y el inferior izquierdo (0) es $u_1 = -0,100$ V, entre el nudo inferior derecho (2) y el nudo (0) es $u_2 = -0,650$ V.

$i_a = 10$ A	$Y_a = 5 \Omega^{-1}$
$i_b = 5$ A	$Y_b = 10 \Omega^{-1}$
$i_c = 30$ A	$Y_c = 30 \Omega^{-1}$

3.5.1.- El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente. En un instante $t_1 = 0$ el conmutador cambia de posición y permanece así hasta que se alcanza un nuevo régimen permanente. Posteriormente, en un instante $t_2 = 0$, el conmutador vuelve a cambiar de posición y permanece así hasta que se alcanza un nuevo régimen permanente. Determinar para cada elemento: la tensión e intensidad, la potencia consumida o generada y la energía almacenada, en:



- $t_1 = 0^-$
- $t_1 = 0^+$
- $t_2 = 0^-$
- $t_2 = 0^+$
- entre $t_1 = 0^+$ y $t_2 = 0^-$
- para $t_2 \geq 0^+$
- Comparar los resultados con los obtenidos mediante los programas de simulación de circuitos. Representar la solución gráficamente.

Solución: a) $u = i = p = W = 0$, $\forall$ elemento b) $i = 0$, $u_R = 0$, $u_L = 24$ V, $p = W = 0$, $\forall$ elemento

c) $i = 24$ mA, $u_R = 24$ V, $u_L = 0$, $p_{\text{cons}, R} = 0,576$ W, $p_{\text{cons}, L} = 0$, $p_{\text{gen}, E} = 0,576$ W, $W_L = 1,152 \cdot 10^{-4}$ J

d) $i = 24$ mA, $u_R = 24$ V, $u_L = -24$ V, $p_{\text{cons}, R} = 0,576$ W, $p_{\text{cons}, L} = -0,576$ W, $p_{\text{gen}, E} = 0$, $W_L = 1,152 \cdot 10^{-4}$ J

e) La solución general es:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) + i(0) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

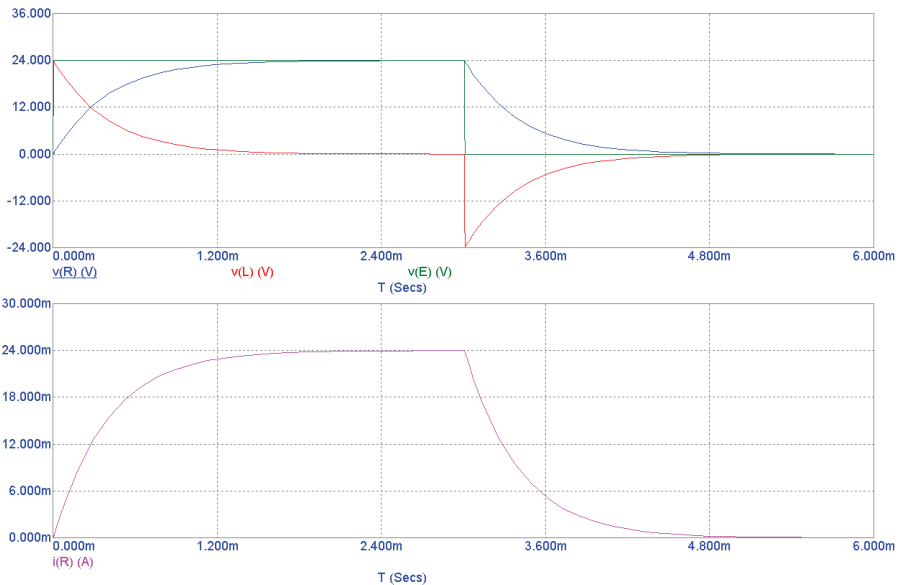
$$u_R(t) = R \cdot i(t) = E \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) + R \cdot i(0) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$u_L(t) = \begin{bmatrix} E - u_R(t) \\ \text{ó} \\ L \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = E e^{-\frac{R}{L}t} - R \cdot i(0) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Se debe sustituir el valor para este intervalo de $i(t_1=0) = 0$. La energía en la bobina $\{W_L(t) = \frac{1}{2} L \cdot i^2(t)\}$ y la potencia generada en la fuente $\{E \cdot i(t)\}$, consumida en la resistencia $\{R \cdot i^2(t)\}$ y en la bobina $\{u_L(t) \cdot i(t)\}$ se obtienen fácilmente.

f) La solución general es la misma del apartado anterior. Se debe sustituir el valor para este intervalo de $i(t_2=0) = 24 \text{ mA}$ y el valor de la fuerza electromotriz que ahora es $E=0$

g) La solución numérica obtenida en los programas de simulación de circuitos coincide con la obtenida analíticamente. Su representación gráfica es:



3.5.2.- Resolver de forma análoga al problema anterior el circuito de la figura.

Solución: a) $u = i = p = W = 0, \forall$ elemento

b) $i = 1 \text{ mA}, u_R = 24 \text{ V}, u_C = 0 \text{ V},$

$p_{\text{cons}, R} = 24 \text{ mW}, p_{\text{cons}, C} = 0, W_C = 0$

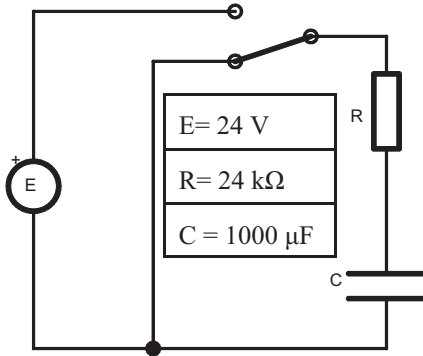
c) $i = 0, u_R = 0, u_C = 24 \text{ V}, p_{\text{cons}, R} = 0,$

$p_{\text{cons}, C} = 0, p_{\text{gen}, E} = 0, W_C = 0,288 \text{ J}$

d) $i = -1 \text{ mA}, u_R = -24 \text{ V}, u_C = 24 \text{ V},$

$p_{\text{cons}, R} = 24 \text{ mW}, p_{\text{cons}, C} = -24 \text{ mW},$

$p_{\text{gen}, E} = 0, W_C = 0,288 \text{ J}$



e) La solución general es:

$$i(t) = \frac{E - u_C(0)}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

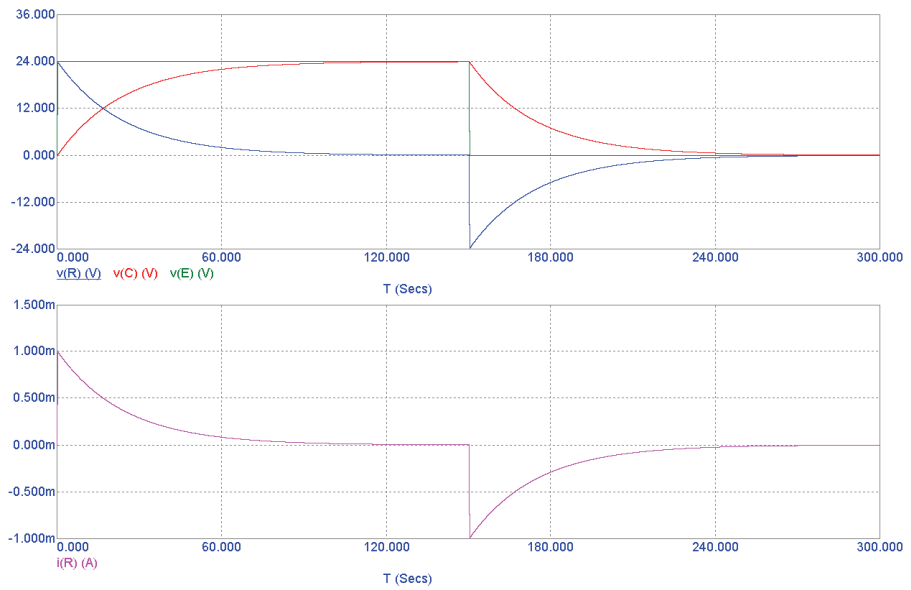
$$u_R(t) = R \cdot i(t) = [E - u_C(0)] \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_C(t) = \begin{bmatrix} \frac{E - u_R(t)}{\frac{1}{C} \int i dt + u_C(0)} \end{bmatrix} = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) + u_C(0) e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Se debe sustituir el valor para este intervalo de $u_C(t_1=0) = 0$. La energía en el condensador $\{W_C(t) = \frac{1}{2} C \cdot u^2(t)\}$ y la potencia generada en la fuente $\{E \cdot i(t)\}$, consumida en la resistencia $\{R \cdot i^2(t)\}$ y en el condensador $\{u_C(t) \cdot i(t)\}$ se obtienen fácilmente.

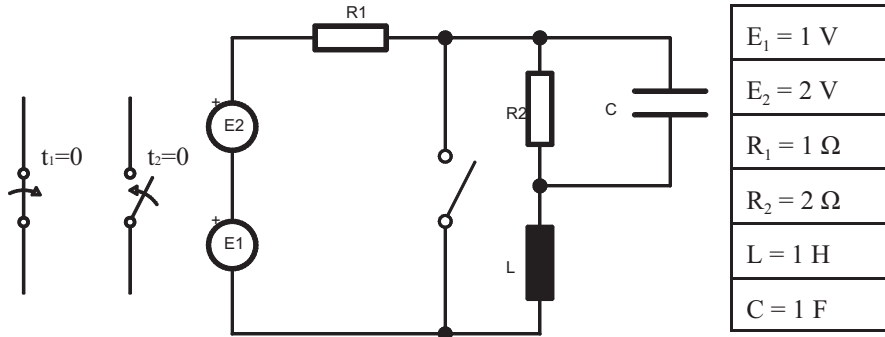
f) La solución general es la misma del apartado anterior. Se debe sustituir el valor para este intervalo de $u_C(t_2=0) = 24 \text{ V}$ y el valor de la fuerza electromotriz que ahora es $E=0$.

g) La solución numérica obtenida en los programas de simulación de circuitos coincide con la obtenida analíticamente. Su representación gráfica es:



Problemas:

3.5.3.- Resolver de forma análoga al problema 3.5.2 el circuito de la figura.



Solución: a) $i = 3 \text{ A}$ en E_1 , E_2 y R_1 , $u_{R1} = 3 \text{ V}$. $P_{\text{gen}, E1} = 3 \text{ W}$, $P_{\text{gen}, E2} = 6 \text{ W}$, $P_{\text{cons}, R1} = 9 \text{ W}$,

$u = i = p = W = 0$ en R_2 , C_1 y L_1

b) $u = i = p = W = 0$, $\forall$ elemento excepto $u_L = 3 \text{ V}$

c) $i = 1 \text{ A}$ $\forall$ elemento excepto $i_C = 0$, $u_{R1} = 1 \text{ V}$, $u_{R2} = u_C = 2 \text{ V}$, $u_L = 0$, $P_{\text{gen}, E1} = 1 \text{ W}$,

$P_{\text{gen}, E2} = 2 \text{ W}$, $P_{\text{cons}, R1} = 1 \text{ W}$, $P_{\text{cons}, R2} = 2 \text{ W}$, $P_{\text{cons}, C} = P_{\text{cons}, L} = 0$, $W_C = 2 \text{ J}$, $W_L = 0,5 \text{ J}$

d) de nuevo $i = 3 \text{ A}$ en E_1 , E_2 y R_1 , $u_{R1} = 3 \text{ V}$. $P_{\text{gen}, E1} = 3 \text{ W}$, $P_{\text{gen}, E2} = 6 \text{ W}$, $P_{\text{cons}, R1} = 9 \text{ W}$

Como C y L almacenan energía, $i_{R2} = i_L = 1 \text{ A}$, $i_C = 0$, $u_{R2} = u_C = 2 \text{ V}$, $u_L = -2 \text{ V}$,

$P_{\text{cons}, R2} = 2 \text{ W}$, $P_{\text{cons}, L} = -2 \text{ W}$, $P_{\text{cons}, C} = 0$. Las energías son iguales a las de c)

e) Llamando (1) a la malla que contiene a E_1 , E_2 , R_1 , R_2 y L , y (2) a la que contiene a R_2 y C se obtiene:

$$I_1(p) = \frac{3p + 1,5}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$I_2(p) = \frac{3}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$p_1 = -\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$p_2 = -\frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Antitransformando y asociando términos complejos conjugados:

$$i_1(t) = 1 + 2,53 \cdot e^{-0,75t} \cos(0,9682 \frac{rad}{s} \cdot t - 113,286^\circ)$$

$$i_2(t) = -3,0984 \cdot e^{-0,75t} \cos(0,9682 \frac{rad}{s} \cdot t + 90^\circ)$$

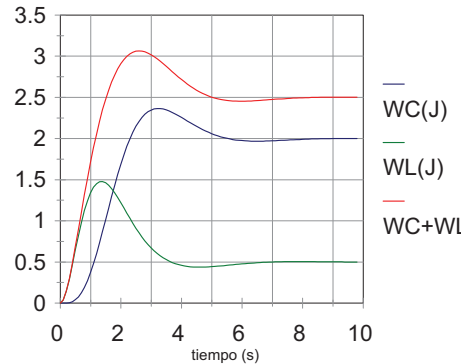
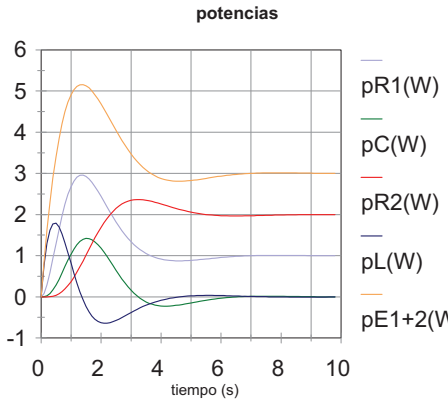
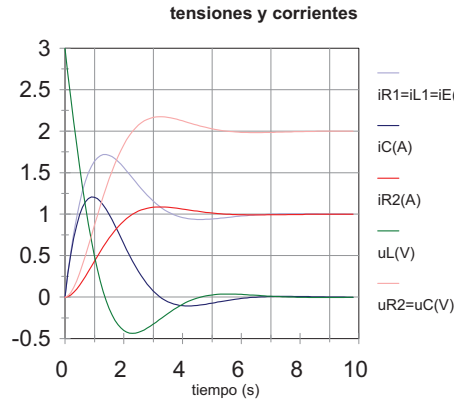
A partir de estas corrientes es fácil obtener todas las tensiones e intensidades:

$$i_{E1} = i_{E2} = i_{R1} = i_L = i_1, i_{R2} = i_1 - i_2,$$

$$i_C = i_2, u_{R1} = R_1 i_{R1}, u_{R2} = R_2 i_{R2},$$

$$u_C = u_{R2}, u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

La energía en el condensador $\{W_C(t) = \frac{1}{2} C \cdot u_C^2(t)\}$ y en la bobina $\{W_L(t) = \frac{1}{2} L \cdot i_L^2(t)\}$, así como la potencia generada en cada fuente $\{E \cdot i(t)\}$, consumida en cada resistencia $\{R \cdot i^2(t)\}$ y en el condensador $\{u_C(t) \cdot i_C(t)\}$ y en la bobina $\{u_L(t) \cdot i_L(t)\}$ se obtienen también fácilmente. Su representación gráfica es:



f) $i = 3$ A en E_1 , E_2 y R_1 , $u_{R1} = 3$ V. $P_{gen, E1} = 3$ W, $P_{gen, E2} = 6$ W, $P_{cons, R1} = 9$ W. En esta parte del circuito $\exists$ transitorio porque no hay ninguna bobina ni condensador.

Al cerrar el interruptor R_2 , L y C quedan en paralelo. Denominando (1) al nudo se que forma a través del interruptor y cero a la otra confluencia de R_2 , L y C , se obtiene:

$$U_1(p) = \frac{\frac{I_L(0)}{C} + u_C(0) \cdot p}{p^2 + \frac{1}{R_2 \cdot C} p + \frac{1}{L \cdot C}} = \frac{1+2p}{(p-p_1) \cdot (p-p_2)}$$

$$p_1 = -0,5 + j\sqrt{3,75}$$

$$p_2 = -0,5 - j\sqrt{3,75}$$

Antitransformando y asociando términos complejos conjugados:

$$u_1(t) = 2,0656 \cdot e^{-0,25t} \cos(0,9682 \frac{\text{rad}}{s} \cdot t - 14,488^\circ)$$

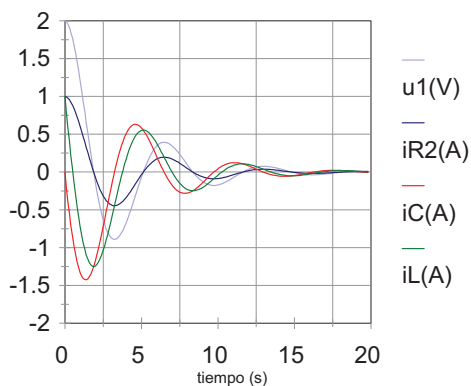
A partir de esta tensión es fácil obtener todas las tensiones e intensidades en R_2 , L y C . Si se mantienen los sentidos de los apartados precedentes:

$$u_{R2} = u_C = u_1, u_L = -u_1, i_{R2} = \frac{u_{R2}}{R_2}, i_C = C \frac{du_C}{dt},$$

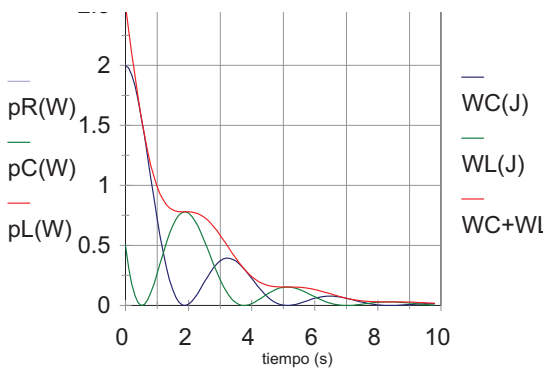
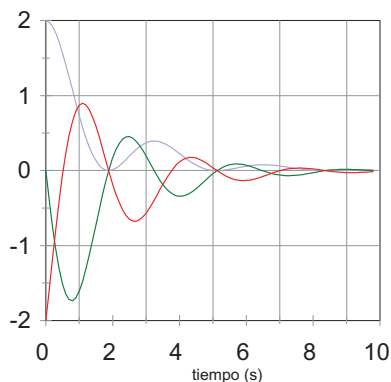
$$i_L = i_{R2} + i_C \text{ (o también por integración de } u_L)$$

Respecto a energías y potencias es válido lo indicado en el apartado anterior. Gráficamente tienen el aspecto que se muestra a continuación:

tensiones y corrientes



potencias



3.5.4.- En un circuito serie formado por una fuente de tensión $e(t)$, una resistencia $R=200\ \Omega$ y una bobina $L=0,2\text{ mH}$ se está midiendo con un osciloscopio la forma de onda de la tensión en la bobina y se observa que es una función cuadrada que se repite periódicamente ($T=2\ \mu\text{s}$) con un valor máximo $+100\text{ V}$ y mínimo de -100 V . Determinar:

- La función $i(t)$ en el circuito si $i=0$ en el momento de cambio de la tensión en la bobina de -100 V a $+100\text{ V}$
- La tensión en la resistencia y la fuerza electromotriz de la fuente
- Potencia en todos los elementos.
- Energía consumida por la resistencia y almacenada por la bobina.

Solución: Tomando origen de tiempos cuando la tensión en la bobina cambia de -100 V a $+100\text{ V}$, u_L es positiva entre $t=0$ y $t=1\ \mu\text{s}$ y negativa entre $t=1$ y $t=2\ \mu\text{s}$. Esto se repite periódicamente.

a) Es una función triangular:

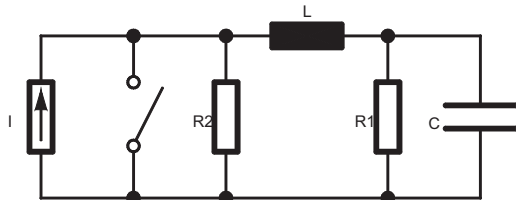
$$t \in [0, 1]: i(t) = 0,5 \cdot t (\mu\text{s}) \quad (\text{A})$$

$$t \in [1, 2]: i(t) = 1 - 0,5 \cdot t (\mu\text{s}) \quad (\text{A})$$

$$\begin{aligned} b) \quad t \in [0, 1]: u_R(t) &= 100 \cdot t (\mu\text{s}), & E(t) &= 100 \cdot \{1 + t (\mu\text{s})\} (\text{V}) \\ t \in [1, 2]: u_R(t) &= 200 - 100 \cdot t (\mu\text{s}), & E(t) &= 100 - 100 \cdot t (\mu\text{s}) (\text{V}) \end{aligned}$$

c) La función potencia consumida en la resistencia tiene forma de parábola con valor máximo 50 W . La función potencia consumida en la bobina son tramos rectos oblicuos entre -50 W y $+50\text{ W}$. La potencia en la fuente es la suma de ambas.

d) La energía se obtiene integrando la potencia. Para la resistencia es preciso tomar un origen de energía consumida. Si este origen es $t=0$ se obtiene una función monótona creciente que, por ejemplo, para $t \in [0, 1]$ vale en (W) $16,67 \cdot t^3 (\mu\text{s})$. La energía almacenada en la bobina es una función periódica formada por tramos de parábola. Por ejemplo, para $t \in [0, 1]$ vale en (W) $2,5 \cdot 10^{-5} \cdot t^2 (\mu\text{s})$



3.5.5.- El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente con el interruptor cerrado. Tomando como origen de tiempos el instante en que se abre el interruptor, determinar:

- Potencia suministrada por la fuente en el instante inicial ($t=0^+$). Energía almacenada en la bobina y en el condensador
 - Potencia suministrada por la fuente en régimen permanente. Energía almacenada en la bobina y en el condensador

$I = 1\text{ A}$
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 200\ \Omega$
$L = 0,5\text{ H}$
$C = 5\ \mu\text{F}$

- c) Evolución de la intensidad y de la tensión en cada componente desde que se abre el interruptor hasta que se alcanza el régimen permanente.
- d) Establecido el régimen permanente se cierra nuevamente el interruptor. Tomando como nuevo origen de tiempos este instante, obtener la nueva evolución de la intensidad y de la tensión en cada componente

Solución: a) $P_{\text{gen}, E} = 200 \text{ W}$, $P_{\text{cons}, R2} = 200 \text{ W}$, $W_L = W_C = 0$

b) $P_{\text{gen}, E} = 200/3 \text{ W}$, $P_{\text{cons}, R2} = 200/9 \text{ W}$, $P_{\text{cons}, R1} = 400/9 \text{ W}$, $W_L = 1/9 \text{ J}$, $W_C = 1/90 \text{ J}$

c) Considerando sentido positivo de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha

$$i_{R2} = \frac{1}{3} + 0,74 \cdot e^{-710t} - 0,074 \cdot e^{-1690t} \quad (A) \quad u_{R2} = \frac{200}{3} + 148 \cdot e^{-710t} - 14,8 \cdot e^{-1690t} \quad (V)$$

$$i_{R1} = \frac{2}{3} - 1,15 \cdot e^{-710t} + 0,48 \cdot e^{-1690t} \quad (A) \quad u_{R1} = \frac{200}{3} - 115 \cdot e^{-710t} + 48 \cdot e^{-1690t} \quad (V)$$

$$i_C = 0,41 \cdot e^{-710t} - 0,41 \cdot e^{-1690t} \quad (A) \quad u_C = u_{R1}$$

$$i_L = \frac{2}{3} - 0,74 \cdot e^{-710t} + 0,074 \cdot e^{-1690t} \quad (A) \quad u_L = 263 \cdot e^{-710t} - 62,5 \cdot e^{-1690t} \quad (V)$$

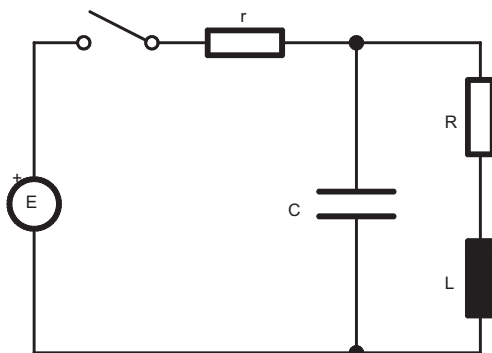
La fuerza electromotriz (en el sentido de la corriente) es $E = u_{R2}$

d)

$$\begin{aligned} i_{R2} &= 0 & u_{R2} &= 0 \\ i_{R1} &= 0,76 \cdot e^{-225,40t} - 0,097 \cdot e^{-1774,60t} \quad (A) & u_{R1} &= 76 \cdot e^{-225,40t} - 9,7 \cdot e^{-1774,60t} \quad (V) \\ i_C &= -0,086 \cdot e^{-225,40t} + 0,086 \cdot e^{-1774,60t} \quad (A) & u_C &= u_{R1} \\ i_L &= 0,674 \cdot e^{-225,40t} - 0,011 \cdot e^{-1774,60t} \quad (A) & u_L &= -u_{R1} \end{aligned}$$

La fuerza electromotriz es cero.

3.5.6.- El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente con el interruptor abierto. Tomando como origen de tiempos el instante en que se cierra el interruptor, realizar los mismos apartados del problema anterior (en el apartado d se abre nuevamente).



$E = 50 \text{ V}$
$r = 10 \, \Omega$
$R = 5 \, \Omega$
$L = 0,1 \text{ H}$
$C = 200 \, \mu\text{F}$

Solución: a) $P_{\text{gen}, E} = 250 \text{ W}$, $P_{\text{cons}, r} = 250 \text{ W}$, $W_L = W_C = 0$

b) $P_{\text{gen}, E} = 166,7 \text{ W}$, $P_{\text{cons}, R2} = 111,1 \text{ W}$, $P_{\text{cons}, R1} = 55,6 \text{ W}$, $W_L = 0,56 \text{ J}$, $W_C = 0,028 \text{ J}$

c) Considerando sentido positivo de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha

$$\begin{aligned} i_r &= \frac{10}{3} - 40 \cdot e^{-250t} + \frac{125}{3} \cdot e^{-300t} \quad (A) & u_r &= \frac{100}{3} - 400 \cdot e^{-250t} + \frac{1250}{3} \cdot e^{-300t} \quad (V) \\ i_R = i_L &= \frac{10}{3} - 20 \cdot e^{-250t} + \frac{50}{3} \cdot e^{-300t} \quad (A) & u_R &= \frac{50}{3} - 100 \cdot e^{-250t} + \frac{250}{3} \cdot e^{-300t} \quad (V) \\ i_C &= -20 \cdot e^{-250t} + 25 \cdot e^{-300t} \quad (A) & u_C &= \frac{50}{3} + 400 \cdot e^{-250t} - \frac{1250}{3} \cdot e^{-300t} \quad (V) \\ & & u_{i_L} &= 500 \cdot (e^{-250t} - e^{-300t}) \quad (V) \end{aligned}$$

La corriente(en el sentido de la fuerza electromotriz) es $i_E = i_r$

d) $i_E = i_r = 0$

$$\begin{aligned} i_R = i_L = -i_C &= 3,35 \cdot e^{-25t} \cdot \cos(222,2t - 0,1117) \quad (A) \\ u_r &= 0 \end{aligned}$$

$$u_R = 16,75 \cdot e^{-25t} \cdot \cos(222,2t - 6,42^\circ) \quad (V)$$

$$u_L = 374,5 \cdot e^{-25t} \cdot \cos(222,2t - 96,46^\circ) \quad (V)$$

$$u_C = 374,87 \cdot e^{-25t} \cdot \cos(222,2t - 81,03^\circ) \quad (V)$$

3.6.1.- Si en el circuito del problema

3.5.1 la fuente de potencia entrega una

tensión sinusoidal de valor $e(t) = E_{\text{max}}$

$\cos(\omega t + \varphi_0)$, determinar para cada ele-

mento la tensión e intensidad, la potencia consumida o generada y la energía almacenada, en:

$E_{\text{max}} = 24 \text{ V}$	$\omega = 5000 \pi \text{ rad/s}$	$\varphi_0 = 0$
---------------------------------	-----------------------------------	-----------------

a) $t_1 = 0^-$. Se encuentra en régimen permanente

b) $t_1 = 0^+$

c) Evolución entre $t_1 = 0^+$ y el nuevo régimen permanente

d) $t_2 = 0^-$, si el instante $t_2 = 0$ ocurre justo cuando $i(t_1)$ alcanza un máximo.

e) $t_2 = 0^+$

f) evolución para $t_2 \geq 0^+$

Solución: a) y b) coinciden con 3.5.1

c)

$$i_R(t) = i_L(t) = i_E(t) = i(t) = \frac{E_{\text{max}}}{Z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_Z) - \frac{E_{\text{max}}}{Z} \cos(\varphi_0 - \varphi_Z) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R(t) = E_{\text{max}} \cdot \cos \varphi_Z \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_Z) - E_{\text{max}} \cdot \cos \varphi_Z \cdot \cos(\varphi_0 - \varphi_Z) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + R \cdot i_L(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

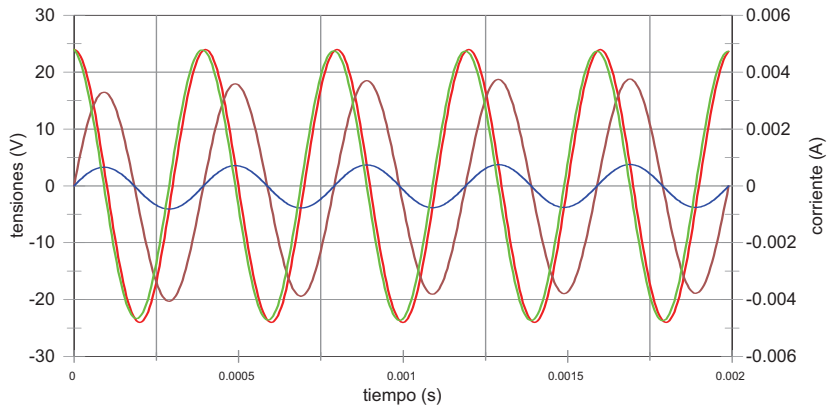
$$u_L(t) = E_{\text{max}} \cdot \sin \varphi_Z \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_Z + \frac{\pi}{2})$$

Siendo: $\vec{Z}=R+j\omega L=1000+j6283 \Omega=6362\angle 80,96^\circ \Omega$, en las ecuaciones anteriores se utiliza el módulo y argumento de $\vec{Z}$

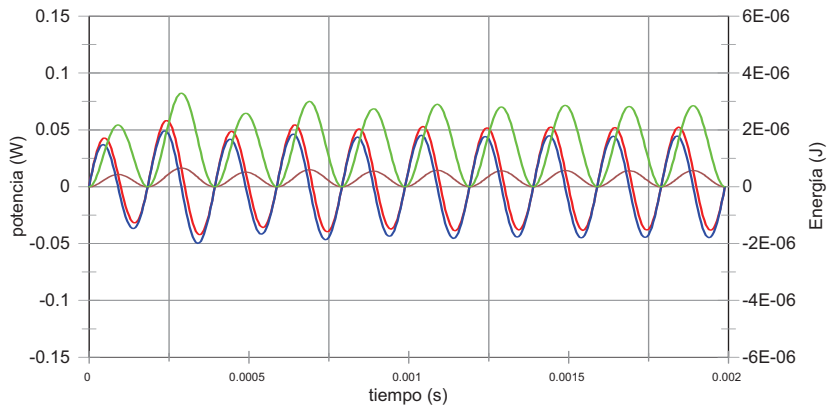
$\tau=\frac{R}{L}=4\cdot 10^{-4} s$, es la constante de tiempo. Esto significa que el

régimen permanente se alcanza en unos 2 ms, que corresponde en este caso con unos cinco ciclos de la fuente porque el periodo es también 0,4 ms.

El aspecto de la corriente, las tensiones, potencias y energía es:

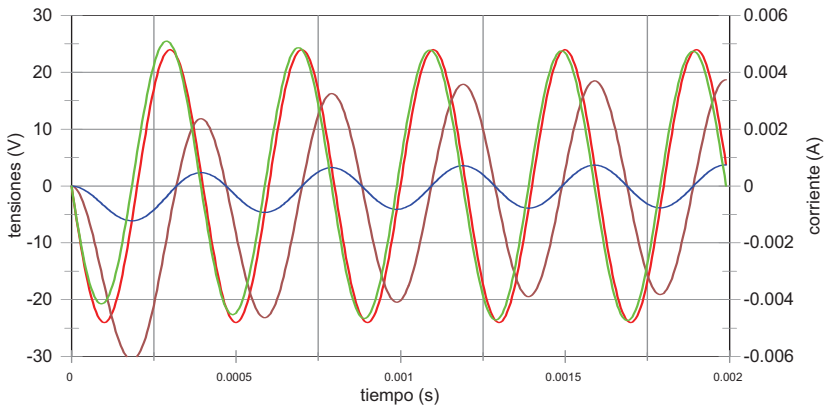


— e — i — uR — uL

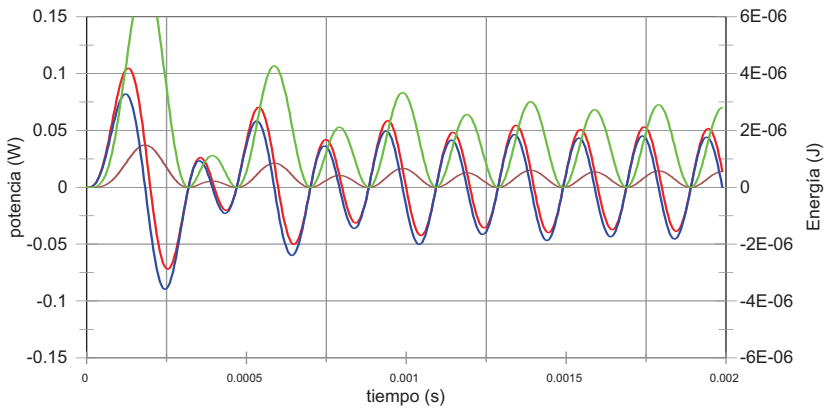


— P_E — P_R — P_L — W_L

El transitorio resulta poco apreciable porque en el instante de conexión la corriente en la bobina ($i_L=0$) casi coincide con la que correspondería a ese instante si el circuito se encontrase ya en régimen permanente. Si el instante de conexión fuera otro (por ejemplo, haciendo que φ_0 sea 90°) la exigencia de continuidad en i_L provoca un transitorio claramente observable:



— e — i — u_R — u_L



— P_E — P_R — P_L — W_L

d) En régimen permanente la corriente es sinusoidal:

$$i(t) = \frac{E_{\max}}{Z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_Z).$$

El valor máximo aparece cuando $\cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_Z) = 1$. Para $\varphi_0 = 0$, son los instantes $t = 9 \cdot 10^{-5} + Tn$ (s) {siendo T el periodo y n cualquier entero tal que se encuentre en régimen permanente}. En estos instantes la corriente vale 3,77 mA. Análogamente, $e = u_R = 3,77$ V, $u_L = 0$ y de aquí se obtienen fácilmente las potencias y la energía en la bobina.

e) En $t_2 = 0^+$ comienza la descarga de la energía almacenada en la bobina. Como la corriente en la bobina es una función continua, $i_L(t_2 = 0^+) = i_L(t_2 = 0^-) = 3,77$ mA. De aquí es fácil obtener $u_R = 3,77$ V, $u_L = -3,77$ V, las potencias (R consume la que aporta L) y la energía almacenada en L (la misma del apartado anterior)

f) El transitorio de descarga es análogo a 3.5.1

$$\begin{aligned} i(t) &= i(0) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \\ u_R(t) &= R \cdot i(0) e^{-\frac{R}{L}t} \\ u_L(t) &= \begin{bmatrix} E - u_R(t) \\ \text{ó} \\ L \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = -R \cdot i(0) e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

3.6.2.- Si en el circuito del problema 3.5.2 la fuente de potencia entrega una tensión sinusoidal de valor $e(t) = E_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0)$, determinar para cada elemento la tensión e intensidad, la potencia consumida o generada y la energía almacenada, en:

$E_{\max} = 24$ V	$\omega = 0,25 \pi$ rad/s	$\varphi_0 = 0$
-------------------	---------------------------	-----------------

- $t_1 = 0^-$. Se encuentra en régimen permanente
- $t_1 = 0^+$
- Evolución entre $t_1 = 0^+$ y el nuevo régimen permanente
- $t_2 = 0^-$, si el instante $t_2 = 0$ ocurre justo cuando $u_C(t_1)$ alcanza un máximo.
- $t_2 = 0^+$
- Evolución para $t_2 \geq 0^+$

Solución: a) y b) coinciden con 3.5.2

c)

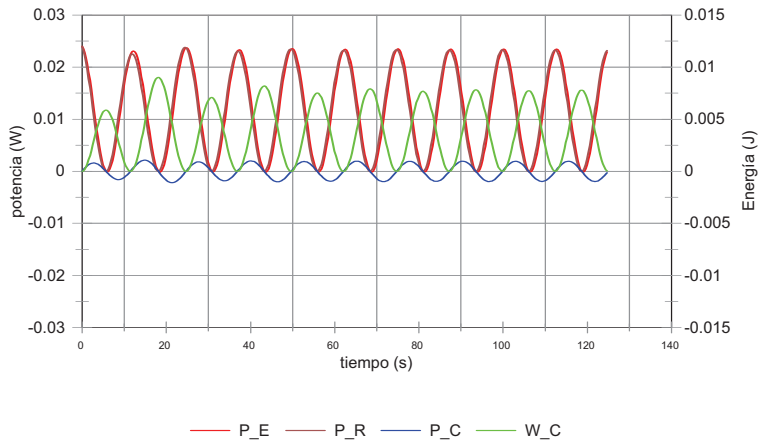
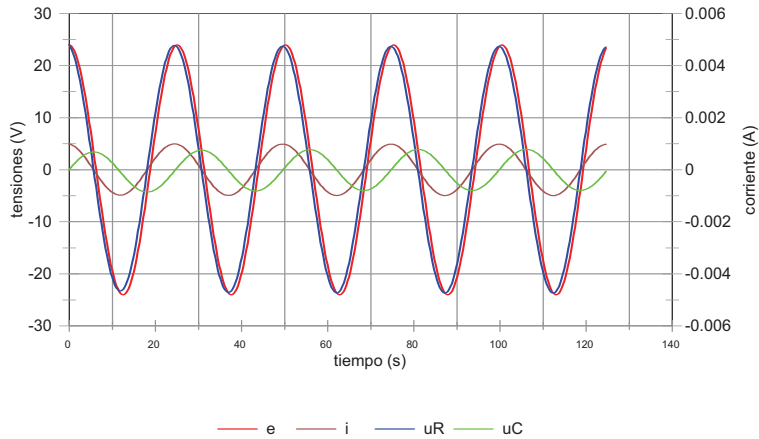
$$i_R(t) = i_C(t) = i_E(t) = i(t) = \frac{E_{\max}}{Z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_Z) + \frac{E_{\max}}{Z} \cos(\varphi_0 - \varphi_Z + \frac{\pi}{2}) \cdot \tan \varphi_Z \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{u_C(0)}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R(t) = E_{\max} \cdot \cos \varphi_Z \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_Z) + E_{\max} \cdot \sin \varphi_Z \cdot \cos(\varphi_0 - \varphi_Z + \frac{\pi}{2}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - u_C(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

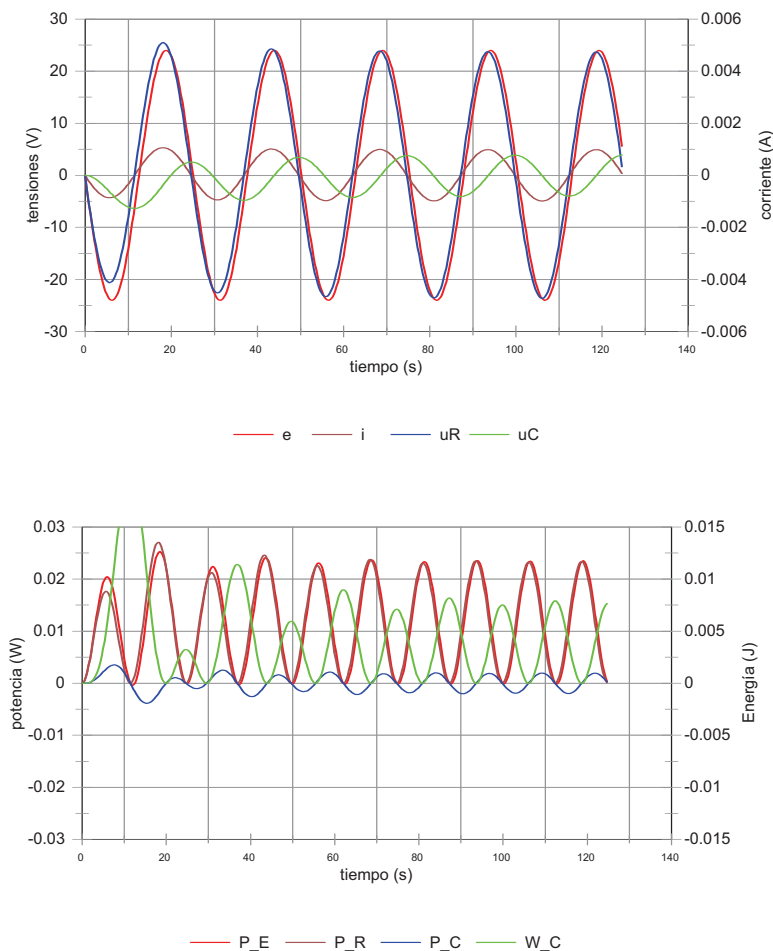
$$u_C(t) = E_{\max} \cdot \sin \varphi_Z \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_Z + \frac{\pi}{2}) - E_{\max} \cdot \sin \varphi_Z \cdot \cos(\varphi_0 - \varphi_Z + \frac{\pi}{2}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + u_C(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Siendo: $\vec{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = 24 \cdot 10^3 - j4 \cdot 10^3 \ \Omega = 24331,05 \angle -9,46^\circ \ \Omega$

en las ecuaciones anteriores se utiliza el módulo y argumento de $\vec{Z}$
 $\tau = R \cdot C = 24 \text{ s}$, es la constante de tiempo. Esto significa que el régimen permanente se alcanza en unos 120 s, que corresponde en este caso con algo menos de cinco ciclos de la fuente porque el periodo es 25,13 s.
 El aspecto de la corriente, las tensiones, potencias y energía es:



El transitorio resulta poco apreciable porque en el instante de conexión la tensión en el condensador ($u_C = 0$) casi coincide con la que correspondería a ese instante en régimen permanente. Si el instante de conexión fuera otro (por ejemplo, haciendo que φ_0 sea 90°) la exigencia de continuidad en u_C provoca un transitorio claramente observable:



d) Al igual que en el problema anterior, en régimen permanente las tensiones son sinusoidales: $u_C(t) = E_{\max} \cdot \text{sen} \varphi_Z \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_Z + \frac{\pi}{2})$. Como $\text{sen} \varphi_Z \leq 0$, el valor máximo aparece cuando $\cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_Z + \frac{\pi}{2}) = -1$, esto es,

para $\varphi_0=0$, en $t= 5,62+Tn$ (s) {siendo T el periodo y n cualquier entero tal que se encuentre en régimen permanente}. En estos instantes la tensión en el condensador vale 3,95 V. Análogamente, $e= 3,95$ V, $u_R= i= 0$ y de aquí se obtienen fácilmente las potencias y la energía en el condensador.

e) En $t_2= 0^+$ comienza la descarga de la energía almacenada en el condensador. Como la tensión en el condensador es una función continua, $u_C(t_2=0^+) = u_C(t_2=0^-) = 3,95$ V. De aquí es fácil obtener $u_R= - 3,95$ V, $i= - 0,165$ mA, las potencias (R consume la que aporta C) y la energía almacenada en C (la misma del apartado anterior)

f) El transitorio de descarga es análogo a 3.5.2

$$i(t) = \frac{-u_C(0)}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = [-u_C(0)] \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_C(t) = \begin{bmatrix} E - u_R(t) \\ \text{ó} \\ \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt + u_C(0) \end{bmatrix} = u_C(0) e^{-\frac{1}{RC}t}$$

3.6.3. Cuando se conecta una fuente sinusoidal a un circuito eléctrico existe la posibilidad de que no aparezca un transitorio. Determinar el valor que debe tener el ángulo inicial y el valor de la tensión en el instante de conexión para que ocurra esto en:

- En el circuito del problema 3.6.1
- En el circuito del problema 3.6.2

Solución: a) para que $\nexists$ transitorio debe ser $\left(\frac{E_{\max}}{Z} \cos(\varphi_0 - \varphi_Z) + i_L(0) \right) = 0$. Como

$i_L(t_I=0)=0$, esto significa $\cos(\varphi_0 - \varphi_Z)=0$. Esto es, $\varphi_0 = \varphi_Z \pm \frac{\pi}{2}$, que corresponde con una fuerza electromotriz +23,7 V o -23,7 V.

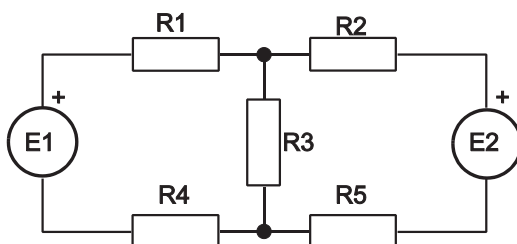
b) análogamente, debe ser $\left(-E_{\max} \cdot \sin \varphi_Z \cdot \cos(\varphi_0 - \varphi_Z + \frac{\pi}{2}) + u_C(0) \right) = 0$. Como

$u_C(t_I=0)=0$, esto significa $\cos(\varphi_0 - \varphi_Z + \frac{\pi}{2})=0$. Esto es, $\varphi_0 = \varphi_Z \pm \frac{\pi}{2}$, que corresponde con una fuerza electromotriz +23,7 V o -23,7 V.

Ensayos:

3.1.- Circuitos con fuentes constantes en régimen permanente

Tomaremos medidas simultáneas de tensiones y corrientes, incluyendo todos los amperímetros y voltímetros necesarios¹ para, una vez en funcionamiento, poder medir las tensiones y corrientes en todos los elementos de forma simultánea, sobre el circuito siguiente utilizando, por ejemplo, $E1 = 12\text{ V}$ y $E2 = 24\text{ V}$ de corriente continua:



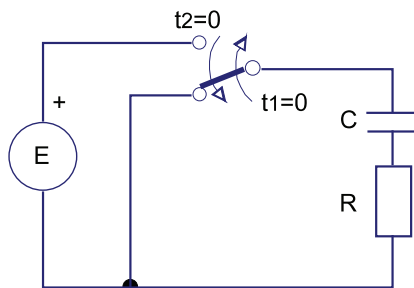
Como en este circuito no se conocen a priori los sentidos reales de tensión y corriente en cada elemento, es imprescindible anotar sobre el esquema los sentidos internos positivos de todos los aparatos de medida. Además, antes de montar el circuito se medirán las resistencias R_1 , R_2 , R_3 , R_4 y R_5 .

- ¿Por qué, en un circuito en funcionamiento, pueden desplazarse los voltímetros de forma segura pero no puede hacerse lo mismo con los amperímetros?
- Verificar analíticamente, considerando los valores medidos de fuerzas electromotrices y resistencias, la exactitud de los resultados obtenidos, considerando despreciable la resistencia de los conductores de conexión y la influencia sobre el circuito de los aparatos de medida.
- Determinar si la diferencia entre los valores calculados y los medidos se encuentra dentro de los límites de error de cada aparato de medida.
- Determinar la potencia consumida o generada por cada elemento del circuito. Verificar el Principio de Conservación de la Energía.

⁽¹⁾ Se utilizarán tantos amperímetros como ramas tiene este circuito, pero puede emplearse solamente un voltímetro que puede desplazarse que, de forma segura, de elemento a elemento mientras se mantiene el circuito en funcionamiento.

3.2.- Transitorio y permanente en un circuito RC serie alimentado por una fuente constante

En primer lugar es necesario tener un orden de magnitud de la duración del transitorio. Por lo que es preciso conocer los valores de R y C utilizados¹. A continuación, partiendo del condensador descargado, lo cual se consigue manteniendo el conmutador en la posición inferior un tiempo suficiente, se cambia en un instante que denominaremos $t_1=0$ la posición del conmutador de forma que la tensión (por ejemplo, $E=24\text{ V}$) de la fuente quede aplicada al circuito. Se medirá la tensión total aplicada al circuito, que debe mantenerse constante durante el ensayo, y la evolución de la corriente en el circuito² anotando las lecturas, para intervalos fijos de tiempo³.



Alcanzado el régimen permanente, y cambiando la posición del conmutador, haremos que la fuerza electromotriz aplicada al circuito $E = 0$ y mediremos de forma análoga el transitorio de descarga. El inicio de este nuevo transitorio lo podemos denominar $t_2=0$.

- Realizar una representación gráfica de $u_R(t)$, $u_C(t)$ e $i(t)$ para el transitorio de carga y para el transitorio de descarga. Determinar, a partir de las lecturas, el valor de la constante de tiempo del circuito⁴.
- Verificar analíticamente los resultados obtenidos considerando el valor medido de la fuerza electromotriz y de la resistencia y el valor de placa del condensador.

⁽¹⁾ Valores que permiten una medida cómoda son: $R=22\text{ k}\Omega$ y $C=1000\text{ }\mu\text{F}$. Algunos condensadores tienen polaridad definida y, si se invierte, se produce su destrucción

⁽²⁾ Es preferible no medir directamente la tensión en la resistencia ni en el condensador para evitar la influencia de la resistencia interna del voltímetro que, en este circuito, puede apreciarse al final del proceso de carga, en su lugar la obtendremos por diferencia $u_C(t) = E - u_R(t)$ y $u_R(t)=R\ i(t)$

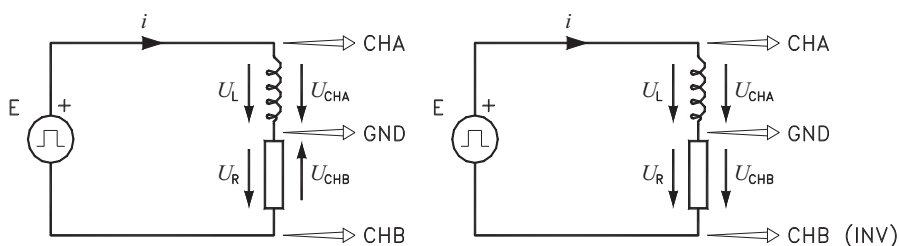
⁽³⁾ Puede utilizarse un cronómetro y leer los valores cada 10 segundos.

⁽⁴⁾ Se puede realizar por tangencia en $t=0$ a la función temporal, por medición del error para 5σ , con más exactitud, mediante una regresión exponencial ajustada por mínimos cuadrados.

- ¿Qué condiciones de continuidad se observan? ¿Qué comportamiento presenta la resistencia y el condensador en régimen permanente con fuentes constantes?

3.3.- Transitorio y permanente en un circuito RL serie alimentado por una fuente constante

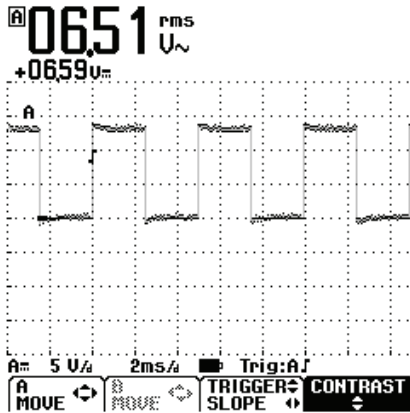
En este caso el transitorio es tan breve que no puede medirse mediante voltímetro y amperímetro, por esto lo visualizaremos en la pantalla de un osciloscopio. Para que el proceso sea visible de forma sencilla es conveniente repetir transitorios cíclicamente, se recurrirá a utilizar un generador de funciones que suministra repetitivamente tensión constante durante cierto tiempo y cero a continuación.



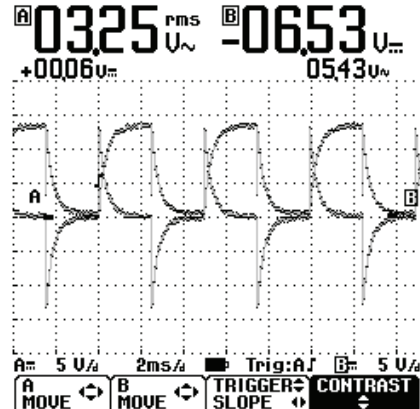
Para observar simultáneamente u_L y u_R es preciso invertir la visualización del canal B.

Se debe observar en primer lugar la forma de onda de la f.e.m. constante pulsatoria aplicada, $e(t)$, y a continuación, simultáneamente, la tensión en la bobina $u_L(t)$ y en la resistencia $u_R(t)$. La corriente que circula $i(t)$ es proporcional a la tensión $u_R(t)$ por lo que para determinar $i(t)$ debe anotarse el valor de la resistencia utilizada¹, esto es: $i(t) = \frac{u(t)}{R}$. Los valores observados son, por ejemplo:

⁽¹⁾ Valores que permiten una visualización sencilla son: frecuencia del generador=200 Hz, $R=1 \text{ k}\Omega$, $\tau \approx 400 \text{ ms}$



Fuerza electromotriz (E) aplicada



Tensiones $u_R(t)$ y $u_L(t)$

- Representar gráficamente $u_R(t)$, $u_L(t)$ e $i(t)$. Indicar el valor del período y frecuencia de las magnitudes medidas. Determinar el valor de la constante de tiempo del circuito. Calcular el valor del coeficiente de autoinducción (L).
- ¿Que ocurre cada vez que se inicia un transitorio? ¿Cómo se comporta R y L en régimen permanente con fuentes constantes?

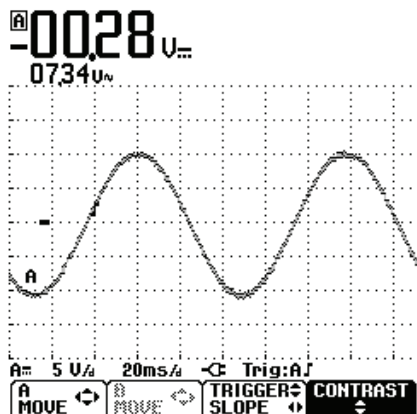
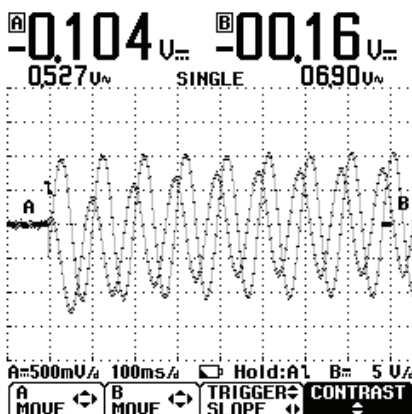
3.4.- Transitorio y permanente en un circuito RC serie alimentado por una fuente sinusoidal

Para visualizar la tensión en el condensador $u_C(t)$, la tensión en la resistencia $u_R(t)$, y por tanto la intensidad $=u_R/R$, es necesario utilizar un osciloscopio. Es conveniente iniciar este ensayo observando y anotando el régimen estacionario sinusoidal que se alcanza. Para ello se sitúa el conmutador en la posición que conecta el circuito RC con la fuente¹.

El circuito es análogo al del ensayo 2, utilizando como fuente un generador de funciones. Partiremos del circuito RC descargado, lo cual se garantiza manteniendo largo tiempo, comparado con τ , el conmutador en la posición que cortocircuita el circuito RC. Este circuito, maniobrando el conmutador en un instante que denominaremos $t_1=0$, se conecta a un generador de funciones que entrega una tensión alterna sinusoidal. En el momento de la conexión aparece, en general, un transitorio que puede

⁽¹⁾ Valores que permiten una cómoda visualización: fuente 10 Hz, $R=22\text{ k}\Omega$, $C=10\mu\text{F}$

visualizarse si se ha configurado apropiadamente el disparo del osciloscopio¹. Dado que el punto del ciclo de la fuente sinusoidal en que se produce la conmutación es una variable aleatoria, puesto que nosotros decidimos el momento en que movemos el conmutador, es necesario repetir el ensayo varias veces para poder extraer conclusiones.

Fuerza electromotriz $e(t)$ Tensión $u_R(t)$ y $u_C(t)$

Aunque la tensión de alimentación al circuito es sinusoidal y las tensiones e intensidades en régimen estacionario también lo son, aparece un transitorio debido a que la tensión en el condensador es una función continua. En este circuito se parte del condensador descargado ($u_C=0$) por lo que el transitorio es tanto más visible cuanto más alejado del paso por cero se encuentra la senoide de tensión en el condensador. Obviamente, si se conmuta justamente en un paso por cero de esta tensión no existe transitorio: el circuito entra directamente en régimen permanente.

- En régimen estacionario, dibujar sobre los mismos ejes la forma de onda de tensión e intensidad en el condensador, indicando el valor del periodo, los valores máximos, así como el desfase tensión-intensidad en unidades de tiempo y en unidades angulares.
- Calcular la frecuencia, la pulsación, el valor eficaz de la tensión y el valor eficaz de la intensidad. Verificar el cumplimiento de la ecuación general de definición del condensador y de la ecuación de definición del condensador en régimen estacionario sinusoidal.
- Respecto al transitorio que aparece, dibujar el transitorio de mayor amplitud que se obtiene y el de menor amplitud. Indicar la magnitud sobre la que se manifiesta

⁽¹⁾ Por ejemplo, modo de disparo *único* y un nivel de disparo adecuado.

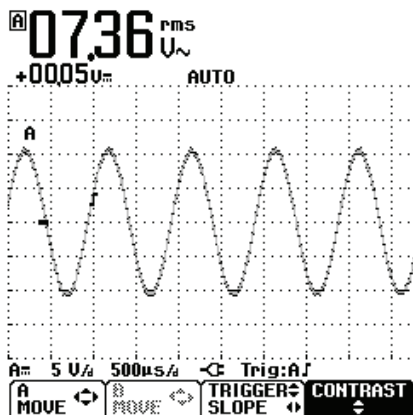
el transitorio en mayor medida ($u_R(t)$, $u_C(t)$, $i(t)$): justificarlo analíticamente. Determinar experimentalmente y analíticamente la duración máxima del transitorio.

- ¿Qué ocurre en $t=0$? ¿Cómo se comporta R y C en régimen permanente con fuentes sinusoidales?

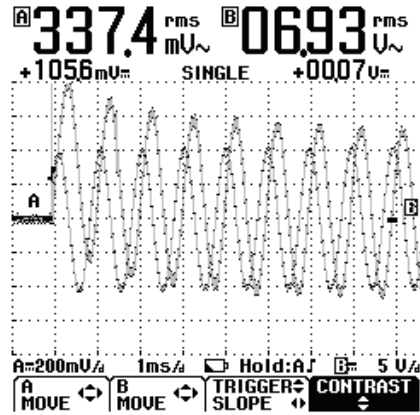
3.5.- Transitorio y permanente en un circuito RL serie alimentado por una fuente sinusoidal

El procedimiento es análogo al del ensayo anterior, para visualizar la tensión en la bobina $u_L(t)$, la tensión en la resistencia $u_R(t)$ y la intensidad $=u_R/R$ es necesario utilizar un osciloscopio.

Es conveniente, asimismo, iniciar este ensayo observando y anotando el régimen estacionario sinusoidal que se alcanza. Para ello se sitúa el conmutador en la posición que conecta el circuito RL con la fuente¹. También en este caso partiremos de un circuito RL descargado, lo cual se garantiza manteniendo largo tiempo el conmutador en la posición que cortocircuita el circuito RL.



Fuerza electromotriz $e(t)$



Tensión $u_R(t)$ y $u_L(t)$

En este caso el transitorio aparece debido a que la corriente en la bobina es una función continua. En este circuito se parte de la bobina descargada ($i_L=0$) por lo que el transitorio es tanto más visible cuanto más alejado del paso por cero se encuentra la sinusoide de corriente en la bobina. Resolver los mismos puntos que en el ensayo 4.

⁽¹⁾ Valores que permiten una cómoda visualización: fuente 1 kHz, $R=100\ \Omega$, $\tau \approx 2\text{ ms}$

4

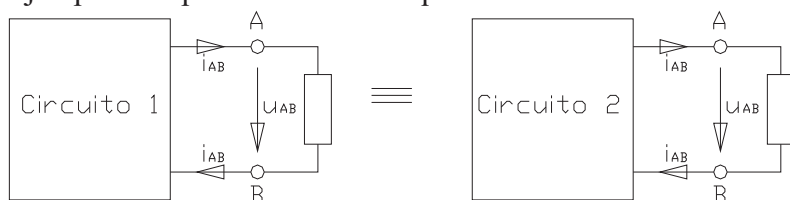
TEOREMAS BÁSICOS

- 1.-Circuitos equivalentes*
- 2.-Linealidad y Superposición*
- 3.-Principio de Sustitución*
- 4.-Equivalente de Thévenin. Equivalente de Norton*

1.- Circuitos equivalentes

Dos circuitos son equivalentes cuando presentan las mismas parejas de valores (tensión, corriente). Los circuitos equivalentes lo son normalmente sólo bornes hacia fuera, esto es, si entre dos bornes A y B de un circuito (1) existe una tensión u_{AB} cuando circula una corriente i_{AB} y entre dos bornes A y B de otro circuito (2) existe la misma tensión u_{AB} cuando circula la misma corriente i_{AB} , se dice que *el circuito (1) y el circuito (2) son equivalentes bornes hacia fuera entre los puntos A y B*.

Ejemplos simples de circuitos equivalentes son:



El equivalente a un conjunto de impedancias en serie: $Z_{equivalente} = \sum_{i=1}^n Z_i$



La demostración es sencilla aplicando la 2ª LdK a ambos circuitos:

$$u_{Z1} + u_{Z2} + \dots + u_{Zn} = -u_{AB} = u_{Zeq}$$

Y sustituyendo las ecuaciones de definición: $(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) \cdot i_{AB} = Z_{eq} \cdot i_{AB}$

El equivalente a un conjunto de admitancias en paralelo: $Y_{equivalente} = \sum_{i=1}^n Y_i$



También en este caso la demostración es sencilla aplicando la 1ª LdK a ambos circuitos:

$$i_{Y1} + i_{Y2} + \dots + i_{Yn} = -i_{AB} = i_{Yeq}$$

Y sustituyendo las ecuaciones de definición: $(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) \cdot u_{AB} = Y_{eq} \cdot u_{AB}$

2.- Linealidad y Superposición

Linealidad de Circuitos:

En una función f lineal $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$. En circuitos eléctricos interesa especialmente definir la linealidad de forma alternativa, pero equivalente, para lo que deben cumplirse las siguientes condiciones;

- $u(\alpha \cdot i) = \alpha \cdot u(i)$
- $u(i_1 + i_2) = u(i_1) + u(i_2)$

O sus inversas utilizando las funciones $i(u)$

Tanto la primera como la segunda condición la satisfacen directamente las ecuaciones de definición de los elementos ideales pasivos siempre que R, L y C no dependan de la tensión ni de la corriente. En los circuitos que analizaremos podremos asumir, en general, que son aproximadamente constantes. También las satisfacen las fuentes de potencia ideales que hemos definido. En este caso se dice que el circuito eléctrico es lineal.

Teorema de Superposición:

Este Teorema es consecuencia directa de las propiedades de la Linealidad, por tanto sólo puede aplicarse a los circuitos eléctricos lineales. Si el circuito tiene (e) fuentes ideales de tensión y (c) fuentes ideales de corriente, llamando:

- $i_{m, ej}$: corriente que recorre el elemento Z_m debido a e_j
- $i_{m, ik}$: corriente que recorre el elemento Z_m debido a i_k
- $u_{m, ej}$: tensión en el elemento Z_m debido a e_j
- $u_{m, ik}$: tensión en el elemento Z_m debido a i_k

Entonces la corriente y la tensión en el elemento Z_m vale:

$$i_m = \sum_{\forall j} i_{m, e_j} + \sum_{\forall k} i_{m, i_k}$$

$$u_m = \sum_{\forall j} u_{m, e_j} + \sum_{\forall k} u_{m, i_k}$$

La demostración puede realizarse escribiendo matricialmente el sistema de ecuaciones para la resolución por mallas:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & Z \\ & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_j \end{pmatrix}$$

El vector de fuerzas electromotrices puede descomponerse en suma de todas las fuerzas electromotrices del circuito y, si el circuito es lineal, se cumplirá:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & Z \\ & \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} i_{1, e_1} \\ i_{2, e_1} \\ \vdots \\ i_{j, e_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_{1, e_2} \\ i_{2, e_2} \\ \vdots \\ i_{j, e_2} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} i_{1, e_j} \\ i_{2, e_j} \\ \vdots \\ i_{j, e_j} \end{pmatrix} \right]$$

Aunque, por simplicidad de notación, se ha realizado la descomposición en fuerzas electromotrices de malla, de forma similar se puede

descomponer en suma de fuentes individuales. Análogamente puede demostrarse partiendo de las ecuaciones de nudo.

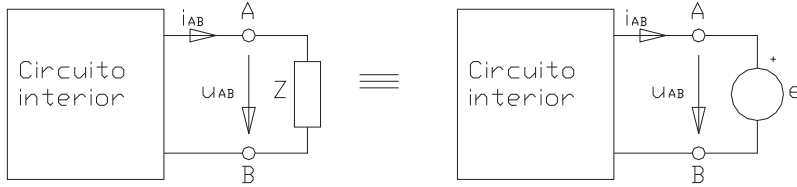
Conviene destacar que anular una fuente de tensión es hacer su fuerza electromotriz $e=0$, esto es, sustituirla por un cortocircuito. Anular una fuente de corriente es hacer su corriente $i=0$, esto es, sustituirla por un circuito abierto.

El Teorema de Superposición se utiliza para resolver circuitos en los que aparecen fuentes de tensión y fuentes de corriente: Por una parte se resuelve por mallas el circuito con todas las fuentes de tensión y por otra se resuelve por nudos el circuito con todas las fuentes de corriente. La corriente, o la tensión, en cada elemento es la suma, con su signo, de la obtenida en cada resolución por separado. La potencia o la energía no son funciones lineales, en consecuencia estas magnitudes se deben obtener de los valores de tensión y corriente finales.

3.- Principio de Sustitución

Siempre es posible reemplazar un elemento pasivo de un circuito por una fuente de potencia de valor apropiado para que las corrientes y tensiones en el circuito no se modifiquen. Aunque el circuito no es el mismo, se comporta igual que el circuito original en ese punto de funcionamiento. Se dice que la fuente sustituye al elemento pasivo.

Se puede sustituir una impedancia Z a la que se aplica una tensión u_{AB} por una fuente de tensión de fuerza electromotriz $e=u_{AB}$. También se puede sustituir una admitancia Y por la que circula una corriente i_{AB} por una fuente de corriente de valor $i=i_{AB}$. La demostración es sencilla:



La ecuación de un lazo que incluya la rama exterior en cada circuito es:

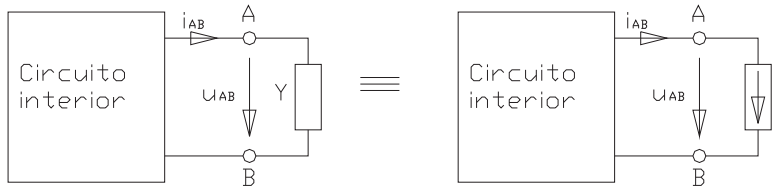
$$\sum e_{interior} = \sum u_{interior} + u_{AB}$$

$$\sum e_{interior} - e = \sum u_{interior}$$

Análogamente, para la sustitución por fuente de corriente, la ecuación del nudo que incluye la rama exterior en cada circuito es:

$$\sum i_{entrantes desde fuentes, interior} = \sum i_{salientes por Y, interior} + i_{AB}$$

$$\sum i_{entrantes desde fuentes, interior} - i_{fuente exterior} = \sum i_{salientes por Y, interior}$$



4.- Equivalente de Thévenin. Equivalente de Norton

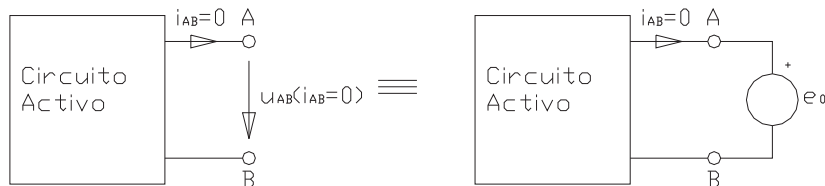
Los circuitos equivalentes más simples aplicables a cualquier circuito que contenga fuentes de potencia (circuito activo), y los más utilizados, son:

- Equivalente de Thévenin: formado por una fuente de tensión en serie con una impedancia
- Equivalente de Norton: formado por una fuente de corriente en paralelo con una admitancia

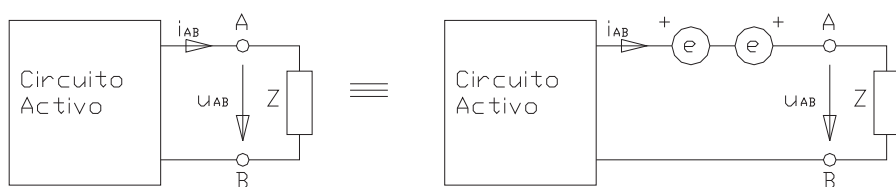
La demostración de la forma de estos equivalentes y los valores de las fuentes, impedancias y admitancias que aparecen se realiza de forma sencilla utilizando el Principio de Sustitución y el Teorema de Superposición:

Equivalente de Thévenin:

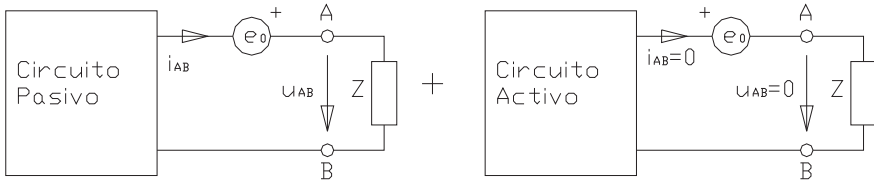
Dado un circuito activo (con fuentes de potencia), el equivalente entre dos nudos (A y B) de este circuito debe proporcionar las mismas parejas (u_{AB} , i_{AB}) en cualquier punto de funcionamiento. Por ejemplo, en vacío ($i_{AB}=0$). Aplicando Sustitución:



En general, para cualquier valor de Z conectada entre A y B, es posible sustituir un tramo de conductor ideal por dos fuentes de tensión iguales y conectadas en oposición:



Si las fuentes que se han añadido son exactamente de valor $e_0 = u_{AB}(i_{AB}=0)$ y se aplica superposición dejando en un circuito todas las fuentes interiores y una de las exteriores; y en el otro sólo una fuente exterior, el circuito original equivale a:

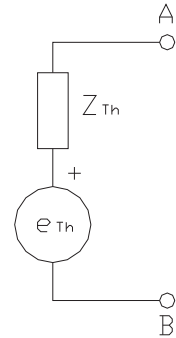


Como en el circuito de la derecha u_{AB} e i_{AB} son cero, tal como se ha visto en el inicio de esta demostración, el circuito de la izquierda produce la misma pareja (u_{AB}, i_{AB}) que el circuito original y, en consecuencia, es su equivalente de Thévenin entre los bornes A y B.

Habitualmente se dibuja como una fuente de tensión en serie con una impedancia, siendo:

$$e_{Th} = e_0 = u_{AB_0} = \text{tensión entre A y B en vacío}$$

$$Z_{Th} = \text{impedancia del circuito pasivo entre A y B} = \frac{u_{AB_0}}{i_{AB_{cc}}}$$

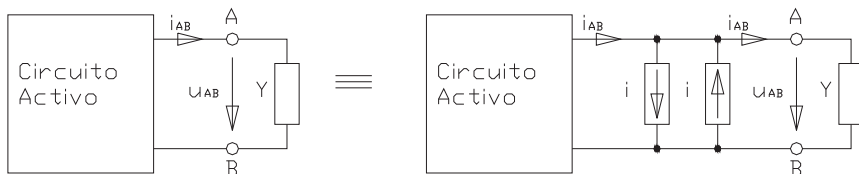


Equivalente de Norton:

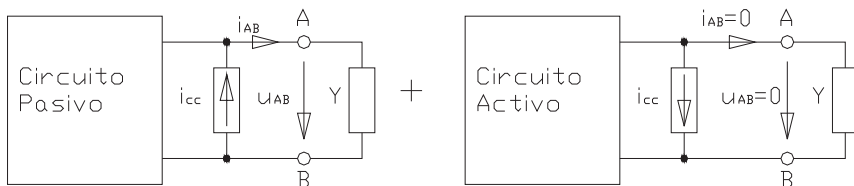
Es el recíproco del Equivalente de Thévenin por lo que el procedimiento para realizar la demostración es muy similar. Dado un circuito activo, el equivalente entre dos nudos (A y B) de este circuito debe proporcionar las mismas parejas (u_{AB}, i_{AB}) en cualquier punto de funcionamiento. Por ejemplo, en cortocircuito ($u_{AB}=0$). Aplicando Sustitución:



Al igual que antes, para cualquier valor de Z conectada entre A y B, añadir dos fuentes, en este caso de corriente, iguales y conectadas en oposición no modifica el circuito:



Si las fuentes que se han añadido son exactamente de valor $i_{cc} = i_{AB}(u_{AB}=0)$ y se aplica superposición con habilidad, el circuito original equivale a:

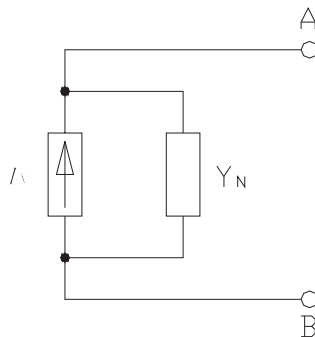


En el circuito de la derecha u_{AB} e i_{AB} son cero, tal como se ha visto en el inicio de esta demostración, así, el circuito de la izquierda produce la misma pareja (u_{AB}, i_{AB}) que el circuito original. En este caso es su equivalente de Norton entre los bornes A y B.

Habitualmente se dibuja como una fuente de corriente en paralelo con una admitancia, siendo:

$$i_N = i_{cc} = i_{AB_{cc}} = \text{corriente entre A y B en cortocircuito}$$

$$Y_N = \text{admitancia del circuito pasivo entre A y B} = \frac{i_{AB_{cc}}}{u_{AB_0}} = \frac{1}{Z_{Th}}$$



Ejemplos:

4.1.1. Obtener la impedancia o admitancia equivalente:

a) A tres resistencias en serie de valor

$$R_1 = 1 \, \Omega, R_2 = 2 \, \Omega \text{ y } R_3 = 3 \, \Omega$$

b) A tres resistencias en paralelo de valor

$$R_1 = 1 \, \Omega, R_2 = 2 \, \Omega \text{ y } R_3 = 3 \, \Omega$$

c) Al circuito de la figura entre los bornes A y B.

El valor de cada resistencia coincide con su número.

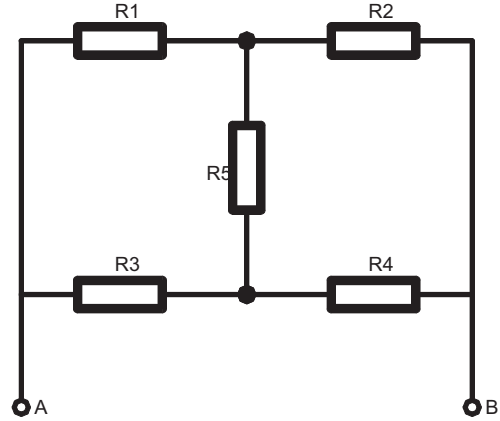
d) A tres admitancias en paralelo de valor :

$$Y_1 = 1 \, \Omega^{-1}, Y_2 = 2 \, \Omega^{-1} \text{ y } Y_3 = 3$$

Solución: a) $6 \, \Omega$ b) $0,5454 \, \Omega$

c) $2,094 \, \Omega$

d) $6 \, \Omega^{-1}$



4.4.1. Obtener entre los bornes A y B del circuito de la figura:

a) Tensión en vacío

b) Corriente en cortocircuito

c) Impedancia y admitancia del dipolo pasivo

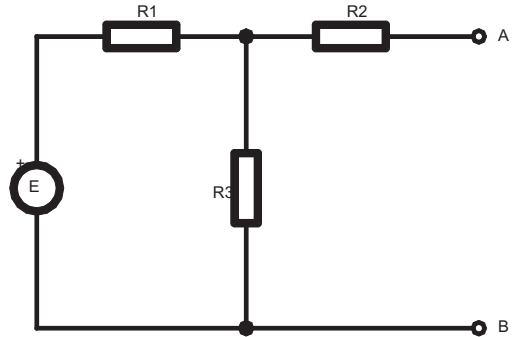
d) Circuito equivalente de Thévenin

e) Circuito equivalente de Norton

Solución: a) $66,67 \text{ V}$ b) $0,2857 \text{ A}$

c) $233,3 \, \Omega, 4,286 \times 10^{-3} \, \Omega^{-1}$

d) $E_{th} = 66,67 \text{ V}, Z_{th} = 233,3 \, \Omega$ e) $I_N = 0,2857 \text{ A}, Y_N = 4,286 \, \Omega^{-1}$



$R_1 = 50 \, \Omega$	$R_2 = 200 \, \Omega$
$R_3 = 100 \, \Omega$	$E = 100 \text{ V}$

4.4.2. Se conectan en paralelo cinco fuentes reales de tensión. De cada una se conoce su fuerza electromotriz y resistencia interna. Denominando A al borne al que se unen todos los positivos de las fuentes y B al borne al que se conectan todos los negativos, determinar:

E (V)	1,7	2,4	2,1	3,2	3,9
$r_i (\Omega)$	0,1	0,5	1,0	0,7	2,0

a) La diferencia de potencial entre A y B

b) El equivalente de Thévenin entre A y B de todas las fuentes

c) El equivalente de Norton entre A y B de todas las fuentes

d) Curva $U_{AB} = f(I_{AB})$ del conjunto de generadores.

- e) U_{AB} e I_{AB} al conectar una resistencia de 10Ω entre A y B
 f) ¿Coincide la potencia perdida en la resistencia interna por el generador equivalente con la perdida por los generadores reales?

Solución: a) $U_{AB}(I_{AB}=0) = 2,04 \text{ V}$

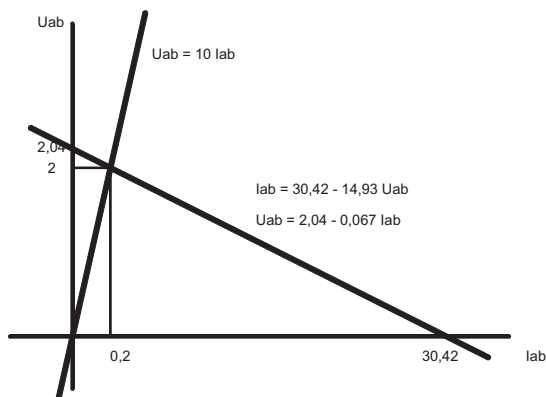
b) $E_{th} = 2,04 \text{ V}$, $Z_{th} = 0,067 \Omega$.

c) $I_N = 30,42 \text{ A}$, $Y_N = 14,93 \Omega^{-1}$

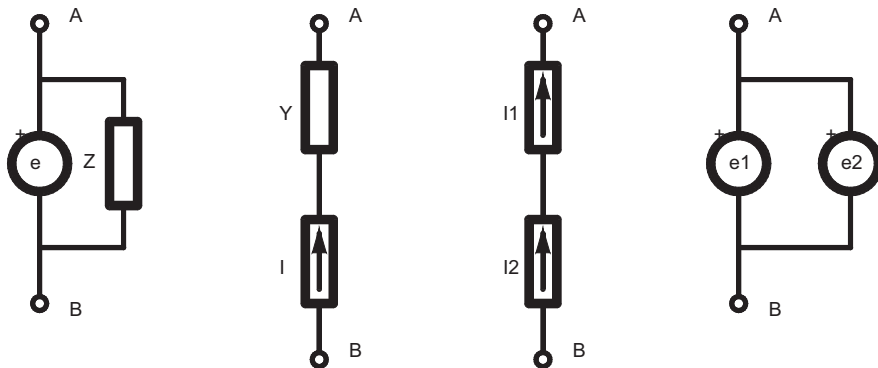
d) ver el gráfico, se muestra $U_{AB}(I_{AB})_{\text{generadores}}$ y $U_{AB}(I_{AB})_{\text{Resistencia}}$. El punto de corte es el punto de funcionamiento del circuito.

e) $U = 2 \text{ V}$, $I = 0,2 \text{ A}$

f) Como los valores interiores del circuito original no son equivalentes a los de los circuitos de Thévenin, las potencias perdidas en las resistencias internas tampoco coinciden. Por ejemplo, con el dipolo en vacío no se pierde potencia en el equivalente de Thévenin, pero realmente sí existe un consumo en las resistencias internas.



4.4.3. Obtener el equivalente de Thévenin y el equivalente de Norton entre A y B de los circuitos siguientes:



Solución: Denominando los circuitos de izquierda a derecha a), b) c) y d):

- a) $e_{Th} = e$, $Z_{th} = 0$. $\nexists$ equivalente de Norton

- b) $\nexists$ equivalente de Thévenin. $I_N = I$, $Y_N = 0$
- c) Es un circuito imposible, salvo que $I_1 = I_2$ (en este caso las f.e.m. de las fuentes están indeterminadas)
- d) Es un circuito imposible, salvo que $e_1 = e_2$ (en este caso las corrientes de las fuentes están indeterminadas)

Problemas:

4.2.1. Calcular la tensión, la intensidad y la potencia consumida o generada por cada elemento del circuito de la figura.

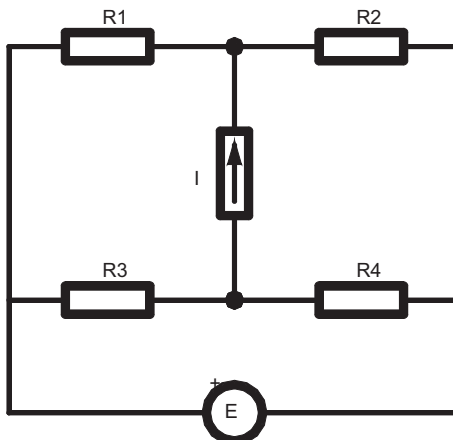
Solución: Considerando sentidos positivos de izquierda a derecha, en los elementos pasivos:

$U_{R1} = 50 \text{ V}$, $U_{R2} = 50 \text{ V}$, $U_{R3} = 70 \text{ V}$,
 $U_{R4} = 30 \text{ V}$, $I_{R1} = 5 \text{ A}$, $I_{R2} = 10 \text{ A}$, $I_{R3} = 35 \text{ A}$, $I_{R4} = 30 \text{ A}$.

Considerando sentidos positivos: $E_1 = 20 \text{ V}$, $E_2 = 40 \text{ A}$.

Las potencias consumidas en las resistencias son:

$P_{R1} = 250 \text{ W}$, $P_{R2} = 500 \text{ W}$, $P_{R3} = 2450 \text{ W}$, $P_{R4} = 900 \text{ W}$, y las generadas en las fuentes: $P_1 = 100 \text{ W}$, $P_E = 4000 \text{ W}$



$E = 100 \text{ V}$	$I = 5 \text{ A}$
$R_1 = 10 \Omega$	$R_2 = 5 \Omega$
$R_3 = 2 \Omega$	$R_4 = 1 \Omega$

4.2.2. Resolver por superposición el circuito del problema

3.2.1. Los valores son:

$E_1 = 75 \text{ V}$	$E_2 = 12 \text{ V}$	$E_3 = 50 \text{ V}$	$I_1 = 7 \text{ A}$	$I_2 = 12 \text{ A}$	$I_3 = 3 \text{ A}$	$R_1 = 20 \Omega$	$R_2 = 15 \Omega$
$R_3 = 5 \Omega$	$R_4 = 53 \Omega$	$R_5 = 150 \Omega$	$R_6 = 10 \Omega$	$R_7 = 2 \Omega$	$R_8 = 470 \Omega$	$R_9 = 11 \Omega$	$R_{10} = 30 \Omega$

Solución: Considerando sentidos positivos de tensiones e intensidades en los elementos pasivos de abajo a arriba y de izquierda a derecha, se obtiene:

$I_{R1} = -2,07 \text{ A}$, $I_{R2} = 2,25 \text{ A}$, $I_{R3} = -6,82 \text{ A}$, $I_{R4} = -0,19 \text{ A}$, $I_{R5} = 0,01 \text{ A}$, $I_{R6} = -12,61 \text{ A}$,
 $I_{R7} = -0,61 \text{ A}$, $I_{R8} = 0,11 \text{ A}$, $I_{R9} = 3 \text{ A}$, $I_{R10} = -2,58 \text{ A}$.

Para las fuentes se considera el sentido de corriente coincidente con el de fuerza electromotriz:

$E_{I1} = I_{R2}$, $E_{I2} = -I_{R4}$, $E_{I3} = 0,71 \text{ A}$, $E_{I1} = -U_{R3}$, $E_{I2} = -U_{R6}$, $E_{I3} = 110,25 \text{ V}$

4.4.4. Resolver el circuito del problema 3.2.1, cuyos valores se encuentran en 4.2.2,

- Por mallas, convirtiendo previamente las fuentes de corriente a fuentes de tensión
- Por nudos, realizando previamente la conversión apropiada

Solución: a) Al resolver por mallas el circuito, una vez sustituidos los equivalentes, se obtienen cuatro corrientes de malla de valor:

-0,6045 A, -0,1796 A, 2,0659 A y -0,1918 A (en sentido horario). La resolución del circuito requiere deshacer los cambios que se han introducido, así se obtienen los valores que ya se consiguieron en el problema 4.2.2 b) Al hacerlo por nudos se obtienen cuatro tensiones de nudo. Su valor, tomando como referencia el nudo inferior izquierdo, es: 41,3178 V, 75,4199 V, 77,2535 V y -48,7911 V. Es necesario aplicar estos valores al circuito real original, así se obtiene la solución al circuito que coincide con la anterior.

Ensayos:

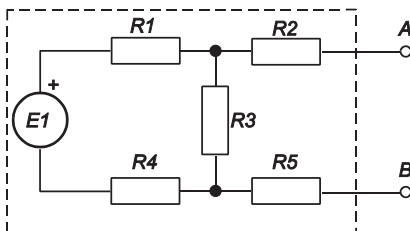
4.1.- Teorema de superposición

Utilizando el mismo circuito del ensayo 3.1, se medirán tensiones y corrientes en todos los elementos del mismo pero haciendo actuar cada fuente separadamente¹. También en este caso es necesario registrar correctamente los sentidos de tensiones y corrientes.

Se comprobará el Teorema de Superposición experimental y analíticamente. Verificaremos que el Teorema de Superposición no se cumple con las potencias. ¿Por qué?

4.2.- Circuitos equivalentes

Sobre el dipolo de la figura, con $E1 = 12\text{ V}$ en corriente continua, obtendremos el equivalente entre los puntos A y B. Como se trata de un circuito lineal, el equivalente será válido para todo valor de tensión e intensidad. Por esto, la forma más sencilla de obtenerlo es mediante ensayos en vacío y en cortocircuito². Se medirá simultáneamente la tensión (U_{AB}) y la corriente (I_{AB}) en cada ensayo. Se determinará el equivalente de Thévenin y de Norton entre los bornes A y B.



⁽¹⁾ Anular una fuente de tensión (E) es sustituirla por un cortocircuito ($E = 0$) y anular una de intensidad (I) es sustituirla por un circuito abierto ($I = 0$).

⁽²⁾ en los circuitos reales no pueden realizarse normalmente ensayos de cortocircuito porque las corrientes resultantes son muy superiores a las que puede soportar. En ese caso debe recurrirse a ensayos con carga.

RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL

Primera parte:

1.-Ventajas de la corriente alterna frente a la corriente continua

2.-Particularización del análisis de circuitos: Fasores, impedancia y admitancia compleja, ecuaciones de definición, leyes de Kirchhoff, métodos de resolución, circuitos equivalentes

3.-Representación gráfica

Segunda parte:

4.-Expresión general de la potencia instantánea $p(t)$ y la energía instantánea $w(t)$

Aplicación a resistencias, bobinas y condensadores ideales

5.-Potencia consumida:

Potencia en un circuito pasivo. $[P, Q, S]_{\text{consumida}}$

Potencia generada:

Potencia en un elemento activo. $[P, Q, S]_{\text{generada}}$

Convenio de sentidos de potencia

6.-Factor de potencia. Energía activa y reactiva

7.-Teorema de Boucherot

8.- Circuitos en régimen estacionario no-sinusoidal

1.- Ventajas de la corriente alterna frente a la corriente continua

Aunque existen numerosas aplicaciones de la corriente continua, los sistemas eléctricos de potencia son de corriente alterna por:

- a) Facilidad de producción: Los generadores de potencia son, hoy por hoy, máquinas rotatorias en las que los conductores eléctricos giran dentro de un campo magnético, pasando sucesivamente bajo un polo Norte y un bajo polo Sur. En estas máquinas la fuerza electromotriz generada es siempre alterna (porque varía cíclicamente entre valores positivos y negativos).

De entre todas las funciones alternas, la más útil es la sinusoidal porque su derivada y su integral también son sinusoidales con lo que las tensiones y las corrientes en todos los elementos (al menos en los ideales que hemos definido hasta ahora) serán sinusoidales.

- b) Facilidad de transporte: Con los recursos tecnológicos actuales, la energía eléctrica no puede almacenarse en cantidades significativas, por esto se genera y se consume en el mismo instante¹. Como además los centros importantes de generación y los centros importantes de consumo se encuentran alejados es necesario transportar la energía eléctrica a grandes distancias.

El transporte se realiza de forma más económica cuando la corriente es menor porque la potencia perdida en las propias redes de transportes es $P_{\text{perdida}} = R_{\text{línea}} \cdot I^2$. Si el centro de consumo demanda una potencia $P = U \cdot I$, la corriente será tanto menor cuanto mayor sea la tensión y las pérdidas de potencia en el transporte decrecerán con el cuadrado de la tensión.

⁽¹⁾ Por ejemplo, la energía que se genera en una central tarda sólo 0,3 ms en ser consumida por un receptor situado a 100 km

Por supuesto, el aumento de la tensión implica mayores aislamientos y esto determina un cierto valor óptimo económico de tensión para cada potencia a transportar y distancia a recorrer. Las tensiones de transporte habituales van desde unos 20 kV, pasando por 66 kV, 132 kV, 220 kV y hasta 440 kV y la mayor parte de la energía eléctrica los recorre todos desde el punto de generación hasta el punto de consumo.

Como el consumo final se realiza habitualmente en baja tensión (230V, 400 V), es necesario disponer de dispositivos que modifiquen el valor de la tensión. El elemento más sencillo y robusto para realizar esta función es el *transformador*, que no son más que dos bobinas acopladas magnéticamente, y, como ya hemos visto, las bobinas sólo transfieren potencia en corriente alterna.

2.- Particularización del análisis de circuitos: Fasores, ecuaciones de definición, leyes de Kirchhoff, métodos de resolución, circuitos equivalentes.

En el apartado 5.2 del capítulo 3 obtuvimos la expresión de las corrientes o tensiones en régimen estacionario sinusoidal en los elementos ideales. Todas son expresiones del tipo: $a(t) = A_{\max} \cos(\omega t + \phi)$. El análisis del régimen estacionario sinusoidal utilizando este tipo de expresiones para realizar las sumas que requiere la aplicación de las leyes de Kirchhoff o los productos que requiere el cálculo de las potencias resulta muy laborioso. Sin embargo, $a(t)$ se corresponde con la parte real del número complejo $A_{\max} \angle \omega t + \phi$ y el tratamiento matemático de los números complejos es notablemente más simple que el de las sinusoidales y, además, su interpretación geométrica es sencilla.

Conviene observar que el número complejo $A_{\max} \angle \omega t + \phi$ tiene módulo constante $A_{\max}$ y argumento variable con el tiempo ($\omega t + \phi$). El ángulo ϕ es el valor inicial del argumento (cuando $t=0$) y, además, el número complejo se encuentra girando con velocidad angular ω . A este tipo de números complejos se les denomina fasores.

Convencionalmente, al módulo de los fasores de las tensiones y de las corrientes se les asigna el valor máximo de la función dividido por $\sqrt{2}$. Así, podemos escribir:

$$u(t) = U_{\text{máx}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2} \operatorname{Re}[\vec{U}] = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{U} + \vec{U}^*)$$

$$i(t) = I_{\text{máx}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2} \operatorname{Re}[\vec{I}] = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{I} + \vec{I}^*)$$

Donde $\vec{U}$ e $\vec{I}$ son los fasores de la tensión y de la corriente y $\vec{U}^*$ e $\vec{I}^*$ son sus conjugados ¹.

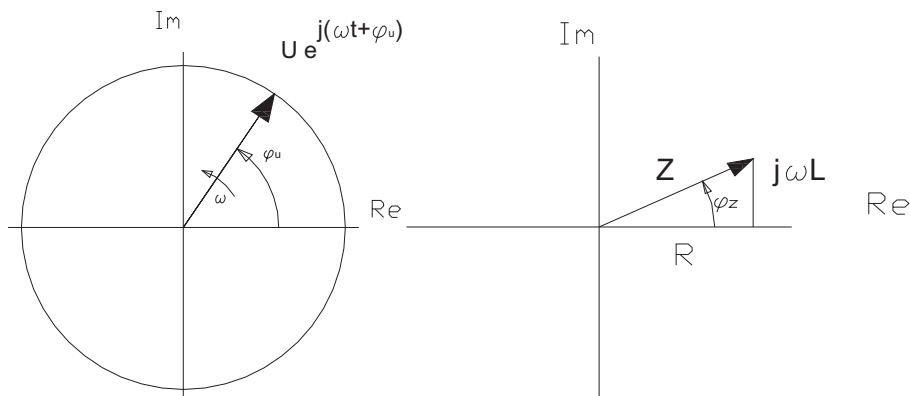
Si se divide el fasor de la tensión entre el fasor de la corriente de cualquier elemento pasivo se obtiene su impedancia compleja:

$\vec{Z} = \frac{\vec{U}}{\vec{I}} = \frac{U \angle \omega t + \varphi_u}{I \angle \omega t + \varphi_i} = \frac{U}{I} \angle \varphi_u - \varphi_i = Z \angle \varphi_u - \varphi_i = R + jX$. A la parte real de la impedancia se le denomina resistencia (R) y a la parte imaginaria reactancia (X).

La representación geométrica del fasor de tensión es un número complejo giratorio con velocidad angular ω , ángulo en $t = 0$ (o ángulo inicial) φ_u y módulo $U = U_{\text{máx}} / \sqrt{2}$.

La impedancia está representada por un número complejo, no giratorio, con parte real R y parte imaginaria $X = j\omega L$.

⁽¹⁾ Esto es: $\vec{U} = U \angle \omega t + \varphi_u$, siendo $U = U_{\text{máx}} / \sqrt{2}$ y $\vec{U}^* = U \angle -(\omega t + \varphi_u)$. Análogamente con I . Conviene recordar que los números complejos también pueden escribirse: $\vec{U} = U e^{j(\omega t + \varphi_u)}$. En muchos casos, como ω es una constante, el término (ωt) se sobreentiende y se indica únicamente el ángulo φ



Algunas definiciones que conviene recordar son:

- **Ciclo:** parte más pequeña que se repite en una función periódica
- **Periodo (T):** duración de un ciclo (s)
- **Frecuencia (f):** número de ciclos por segundo (Hz). $f = \frac{1}{T}$
- **Pulsación (ω):** velocidad angular de los números complejos giratorios que aparecen. Corresponde con la constante que multiplica al tiempo en la expresión sinusoidal (rad/s). $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
- **Valor eficaz:** dada una función $a(t)$, su valor eficaz es:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a(t)^2 dt}$$
 La definición proviene de que una corriente alterna de valor eficaz I produce el mismo efecto calórico que una corriente continua de valor I^1
- **Factor de cresta:** $k_c = \frac{A_{\max}}{A}$, para las funciones sinusoidales $k_c = \sqrt{2}$

⁽¹⁾ $W = \int_0^T R \cdot i(t)^2 \cdot dt = R \cdot I^2 \cdot T$

- **Valor medio:** $A_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt$. El valor medio de una función sinusoidal es cero.
- **Fasor:** es el número complejo giratorio que representa a una función sinusoidal. Por convenio se les asigna como amplitud el valor eficaz.
- **Impedancia compleja:** es el número complejo inmóvil que relaciona el fasor de tensión con el fasor de corriente.
- **Admitancia compleja:** es la inversa de la impedancia. $\vec{Y} = \frac{\vec{I}}{\vec{U}} = \frac{I}{U} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} = \frac{1}{\vec{Z}}$

Se denomina conductancia (G) a la parte real de la admitancia y susceptancia (B) a la parte imaginaria.

Elemento ideal	$\vec{Z}$	$\vec{Y}$
Resistencia	R	$\frac{1}{R}$
Bobina	$j \omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$
Condensador	$\frac{1}{j\omega C}$	$j \omega C$

Por la forma en la que se han obtenido los fasores y las impedancias o las admitancias complejas de los elementos pasivos, las ecuaciones de definición se transforman en:

Elemento Ideal	Ecuación fasorial de definición	
Resistencia	$\vec{U}=R\cdot\vec{I}$	$\vec{I}=\frac{1}{R}\cdot\vec{U}=G\cdot\vec{U}$
Bobina	$\vec{U}=j\omega L\cdot\vec{I}=jX_L\cdot\vec{I}$	$\vec{I}=\frac{1}{j\omega L}\cdot\vec{U}=-jB_L\cdot\vec{U}$
Condensador	$\vec{U}=\frac{1}{j\omega C}\cdot\vec{I}=-jX_C\cdot\vec{I}$	$\vec{I}=j\omega C\cdot\vec{U}=jB_C\cdot\vec{U}$

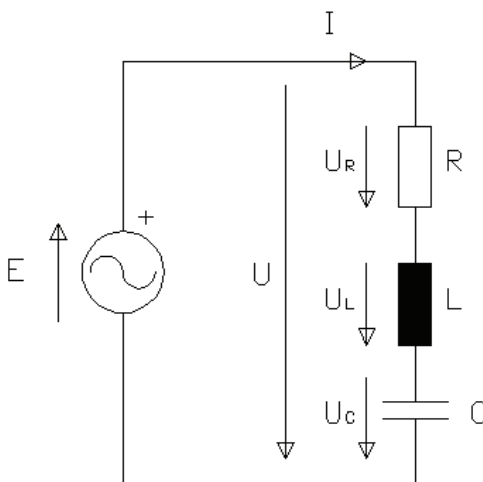
De igual forma, las Leyes de Kirchhoff, los Métodos de Resolución (directa, mallas, nudos) y todos los Teoremas que hemos estudiado son inmediatamente de aplicación, simplemente sustituyendo las funciones temporales ($u(t)$, $i(t)$, $e(t)$) por sus fasores correspondientes ($\vec{U}$, $\vec{I}$, $\vec{E}$) y utilizando las ecuaciones fasoriales de definición de los elementos pasivos.

3.- Representación gráfica

Consideremos un circuito sencillo formado por una fuente de tensión sinusoidal, una resistencia, una bobina y un condensador ideales en serie.

La 2ª LdK indica:

$$\vec{E} = \vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C.$$



Sustituyendo las tensiones que aparecen por sus ecuaciones de definición podemos obtener la impedancia equivalente del circuito:

$$\vec{U} = \vec{Z}\vec{I} = R\vec{I} + jX_L\vec{I} - jX_C\vec{I} = [R + j(X_L - X_C)]\vec{I} = [R + jX]\vec{I}$$

esto es,

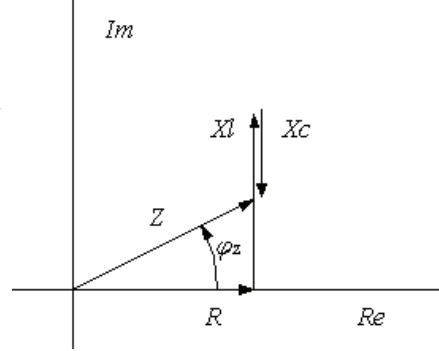
$$\vec{Z} = R + jX, \text{ siendo } X = X_L - X_C.$$

El módulo de la impedancia compleja vale:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

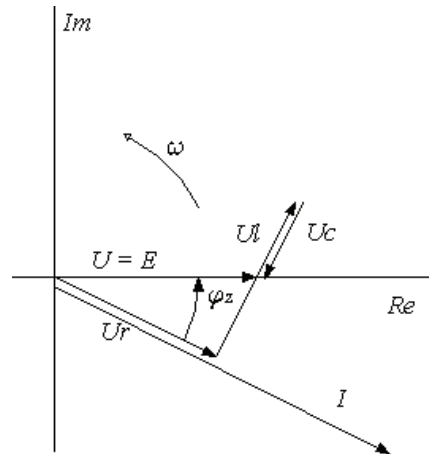
y el argumento

$$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i = \arctan \frac{X}{R}.$$

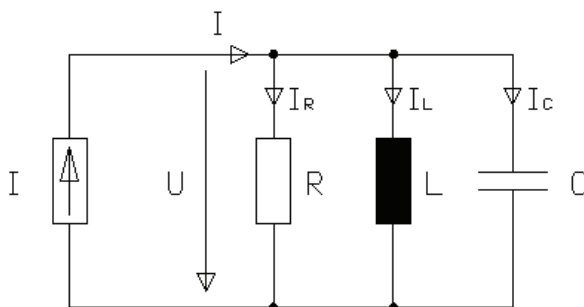


A la representación en el plano complejo de la impedancia se le denomina *triángulo de impedancias*

Multiplicando todos los lados de este triángulo por el fasor de corriente se obtiene un triángulo semejante, pero giratorio con velocidad ω , cuyos lados son los fasores de las tensiones en cada uno de los elementos. A esta representación gráfica de la 2ª LdK se le denomina *triángulo de tensiones*.



De forma similar, si el circuito está formado por una fuente de corriente sinusoidal, una resistencia, una bobina y un condensador ideales en paralelo.



La 1ª LdK indica:

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C$$

Sustituyendo, podemos obtener la admitancia equivalente del circuito:

$$\vec{I} = \vec{Y} \cdot \vec{U} = G \cdot \vec{U} - jB_L \cdot \vec{U} + jB_C \cdot \vec{U} = [G + j(B_C - B_L)] \cdot \vec{U} = [G + jB] \cdot \vec{U}$$

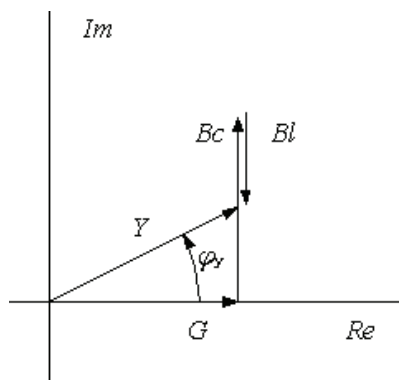
esto es: $\vec{Y} = G + jB$

siendo: $B = B_C - B_L$

El módulo de la admitancia compleja vale:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

y el argumento: $\varphi_Y = \varphi_i - \varphi_u = \arctan \frac{B}{G}$

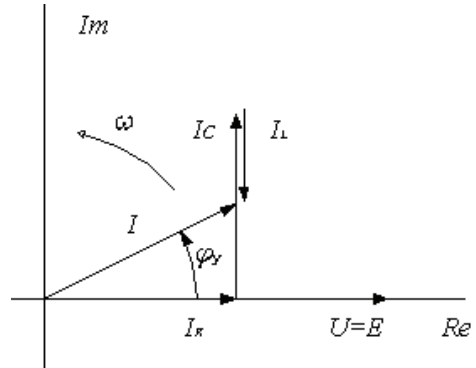


A la representación en el plano complejo de la admitancia se le denomina *triángulo de admitancias*

Multiplicando todos los lados de este triángulo por el fasor de tensión se obtiene un triángulo semejante, pero giratorio con velocidad ω , cuyos lados son los fasores de las corrientes en cada uno de los

elementos. A esta representación gráfica de la 1ª LdK se le denomina *triángulo de corrientes*.

Para entender el funcionamiento de los circuitos es interesante esta representación gráfica de las ecuaciones de Kirchhoff a la que se denomina, en general, *polígono de tensiones y corrientes*.



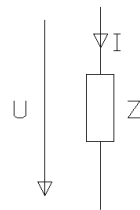
Debe observarse que, como los fasores son giratorios, su representación gráfica puede realizarse para cualquier instante (t), lo cual equivale a considerar distintos orígenes de ángulos. En general se toma el origen de ángulos más cómodo para el análisis (la corriente en circuitos serie, la tensión en circuitos paralelo).

4.- Expresión general de la potencia instantánea $p(t)$ y la energía instantánea $w(t)$. Aplicación a resistencias, bobinas y condensadores ideales.

En un elemento cualquiera, por ejemplo pasivo, conocidas su tensión y su intensidad en forma trigonométrica o en forma exponencial:

$$u(t) = U_{\text{máx}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{U} + \vec{U}^*)$$

$$i(t) = I_{\text{máx}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{I} + \vec{I}^*)$$



La potencia se obtiene directamente $p(t) = u(t) i(t)$. Utilizando la escritura exponencial¹:

$$p(t) = \frac{1}{2} [U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} + U \cdot I \cdot e^{j(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)} + U \cdot I \cdot e^{-j(\varphi_u - \varphi_i)} + U \cdot I \cdot e^{-j(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}] =$$

$$= UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + UI \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

En la escritura trigonométrica, el primer sumando, que oscila con el doble de frecuencia que la tensión o la intensidad, se denomina potencia fluctuante (porque su valor medio es cero) y al segundo potencia media.

La energía se obtiene directamente integrando la potencia. Como $W(t) = \int_0^t p(t) dt + W(t=0)$, lo que puede obtenerse es el incremento de energía:

$$\Delta W(t) = W(t) - W(t=0) = UI \left[\frac{\sin(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}{2\omega} + \cos(\varphi_u - \varphi_i) \cdot t \right]$$

Al primer sumando, que también oscila con el doble de frecuencia que la tensión o la intensidad, se denomina también energía fluctuante y al segundo energía media.

Como en los sistemas industriales la frecuencia es 50 Hz, la pulsación $\omega = 2\pi f = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y, salvo que la energía media sea cero (es decir, que la tensión y la intensidad formen $\pi/2$ rad), el término fluctuante de la energía es insignificante comparado con el término medio al cabo de pocos segundos.

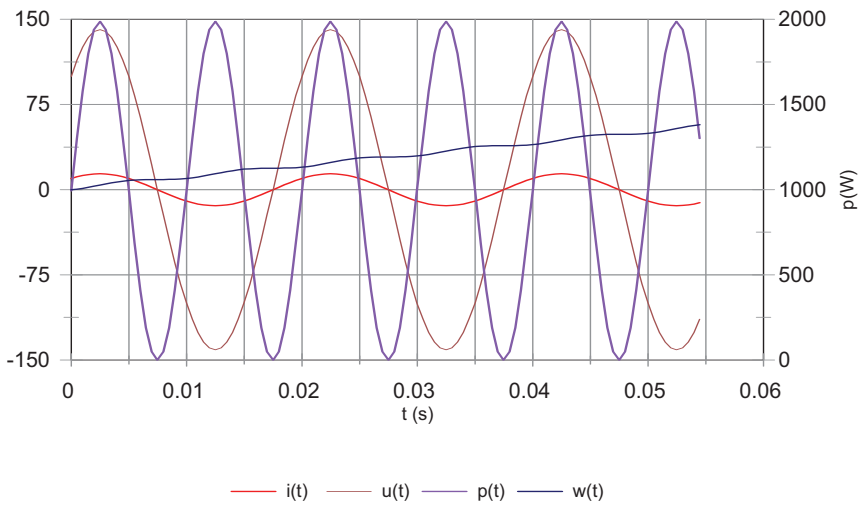
Particularizando para cada elemento pasivo ideal, de la ecuación fasorial de definición se obtiene:

- R: $\varphi_u - \varphi_i = 0$
- L: $\varphi_u - \varphi_i = \pi/2 \text{ rad}$
- C: $\varphi_u - \varphi_i = -\pi/2 \text{ rad}$

⁽¹⁾ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{U} + \vec{U}^*) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{I} + \vec{I}^*) = \frac{1}{2}(\vec{U}\vec{I}^* + \vec{U}\vec{I} + \vec{U}^*\vec{I} + \vec{U}^*\vec{I}^*)$

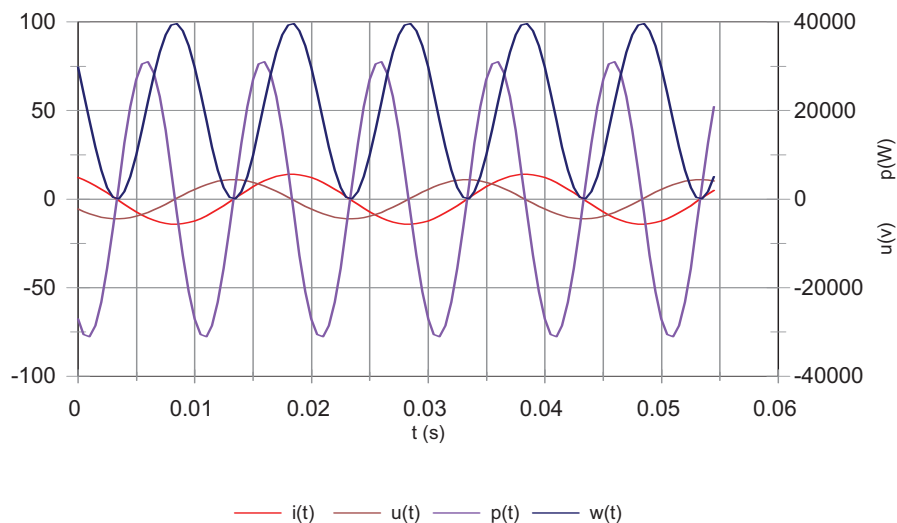
Sustituyendo en las expresiones de potencia y energía se puede observar su aspecto.

En la resistencia, la tensión y la intensidad están en fase, la potencia presenta cierto valor medio (ordenadas de la derecha) y oscila alrededor de él, entre dos veces el valor medio y cero, la energía crece de forma cuasi lineal y, al cabo de pocos ciclos, la componente fluctuante es casi imperceptible.

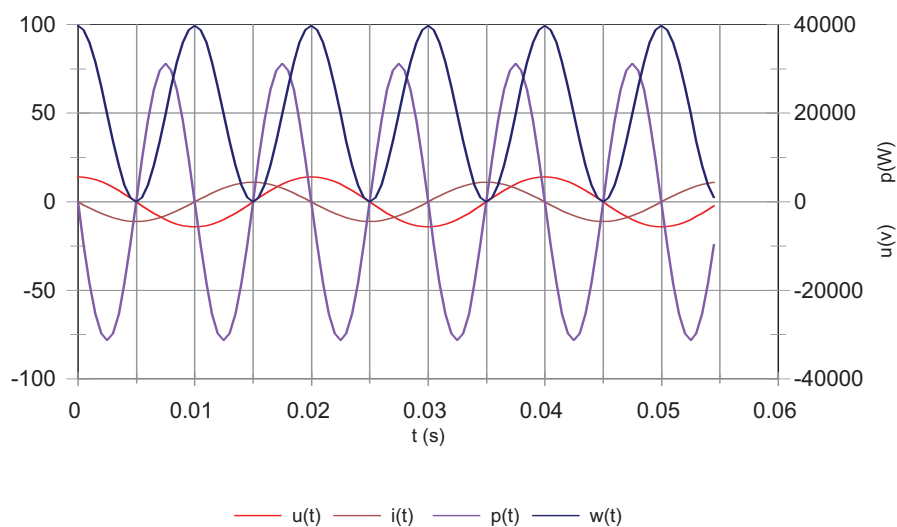


En la bobina, la tensión está adelantada 90° respecto de la intensidad, la potencia es oscilante con valor medio cero y, en consecuencia, la energía fluctúa alrededor del valor que tenía inicialmente. Si se encuentra en régimen estacionario oscila entre el que corresponde a $I_{\text{máx}}$ y cero¹.

⁽¹⁾ Esto es, como la energía en la bobina es $\frac{1}{2}Li^2$, la energía oscila alrededor de la energía correspondiente a la corriente eficaz $I = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}}$. De igual modo ocurre con la energía en el condensador respecto de su tensión.



Análogamente, en el condensador la corriente está adelantada 90° respecto de la tensión y el comportamiento de la potencia y la energía son similares a los de la bobina. Debe observarse que si la bobina y el condensador están en serie o en paralelo las potencias y energías de



ambos tienen siempre sentidos contrarios. Si además tienen el mismo valor se dice que están en resonancia bien serie (o de *tensión*: la misma corriente pero tensiones iguales y opuestas, la suma de tensiones es cero) bien paralelo (o de *corriente*: la misma tensión pero corrientes iguales y opuestas, la suma de corrientes es cero).

De forma análoga se obtiene la potencia y energía generada en una fuente de potencia.

5.- Potencia consumida: Potencia en un circuito pasivo.[P, Q, S]_{consumida}• **Potencia generada: Potencia en un elemento activo.**[P, Q, S]_{generada}• **Convenio de sentidos de potencia**

La interpretación más simple y operativa de la potencia en régimen estacionario sinusoidal se obtiene directamente de la escritura en forma exponencial:

$$p(t) = \frac{1}{2}(\vec{U}\vec{I}^* + \vec{U}\vec{I} + \vec{U}^*\vec{I} + \vec{U}^*\vec{I}^*) =$$

$$= \frac{1}{2}[U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} + U \cdot I \cdot e^{j(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)} + U \cdot I \cdot e^{-j(\varphi_u - \varphi_i)} + U \cdot I \cdot e^{-j(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}]$$

En este caso, de forma parecida a como hemos definido los fasores de tensión y de corriente, aparecen dos sumandos complejos y sus correspondientes conjugados:

- El sumando $\vec{U} \cdot \vec{I}^* = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$ es un número complejo no giratorio al que se denomina potencia compleja $\vec{S}$
- El sumando $\vec{U}\vec{I} = U \cdot I \cdot e^{j(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}$ es un complejo girando a 2ω

Como la diferencia de ángulos $\varphi_u - \varphi_i$ es siempre φ_z , este valor es una característica del circuito, al igual que la tensión y la corriente, sin embargo $\varphi_u + \varphi_i$ depende del origen de ángulos elegido y no aporta información sobre el circuito. Así pues, la potencia compleja $\vec{S}$ es la parte significativa de la función p(t). Veamoslo con más detalle:

- A la *potencia compleja* se le denomina también *potencia aparente* porque su módulo UI es la potencia que, aparentemente, consume el circuito (la que consumiría si estuviésemos en corriente continua). Se mide en *voltamperios* (VA)

$$\vec{S}_{con} = U \cdot \vec{I}^* = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

- La parte real de la potencia compleja se denomina *potencia activa* porque coincide con el valor medio de $p(t)$, es la potencia eléctrica que se convierte en otra forma de energía. Se mide en *vattios* (W)

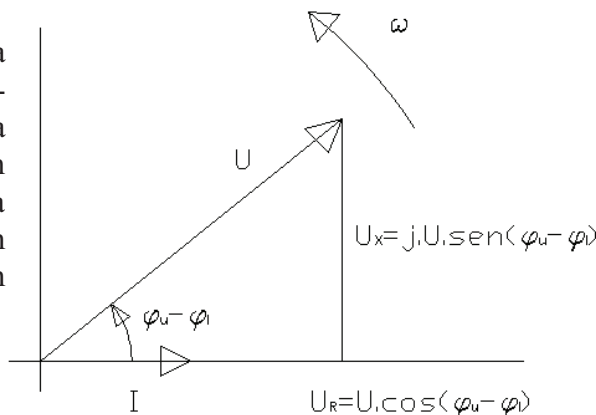
$$P_{con} = MED[p_{con}(t)] = Re[\vec{S}_{con}] = U \cdot I \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

- La parte imaginaria de la potencia compleja se denomina *potencia reactiva* porque, si se separa la potencia $p(t)$ en una componente $p_R(t)$ consumida en una resistencia y otra $p_X(t)$ consumida en una reactancia (bobina o condensador), coincide con el valor máximo de $p_X(t)$. Su unidad es el *var* (aunque todavía se utiliza la antigua denominación: *voltamperio-reactivo*).

$$Q_{con} = MAX[p_{X,max}(t)] = Im[\vec{S}_{con}] = U \cdot I \cdot \sin(\varphi_u - \varphi_i)$$

La comprobación es sencilla. Considerando, por ejemplo, que la resistencia (R) está en serie con la reactancia (X), entonces la tensión $u(t) = u_R(t) + u_X(t)$, o, en forma fasorial:

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_X.$$



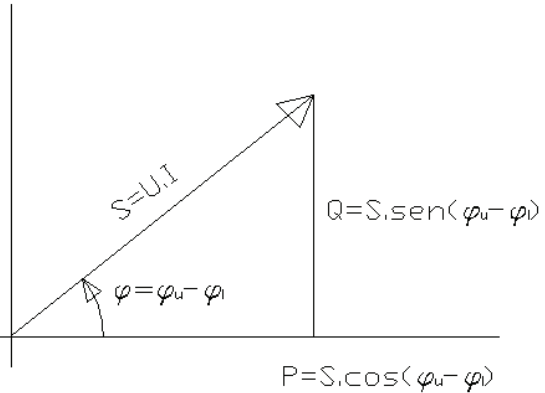
Como $\vec{U}_R$ y $\vec{U}_X$ forman 90° , si se toma como origen de ángulos la corriente, recordando la relación entre fasores y expresiones temporales.

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u_R(t) + u_X(t) = \\
 &= U_{\max} \cos(\varphi_u - \varphi_i) \cos(\omega t) + U_{\max} \operatorname{sen}(\varphi_u - \varphi_i) \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})
 \end{aligned}$$

Y la potencia $p_X(t)$, sustituyendo en su expresión general, vale:

$$p_X(t) = U \cdot I \cdot \operatorname{sen}(\varphi_u - \varphi_i) \cdot \cos(2\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Así, puede dibujarse un triángulo de potencias, semejante al triángulo de impedancias y al triángulo de tensiones o de corrientes. Debe destacarse que, como la potencia compleja $\vec{S} = \vec{U} \vec{I}^* = P + jQ$ es un número complejo inmóvil, el triángulo de potencias, al igual que le ocurre al triángulo de impedancias, no es giratorio.



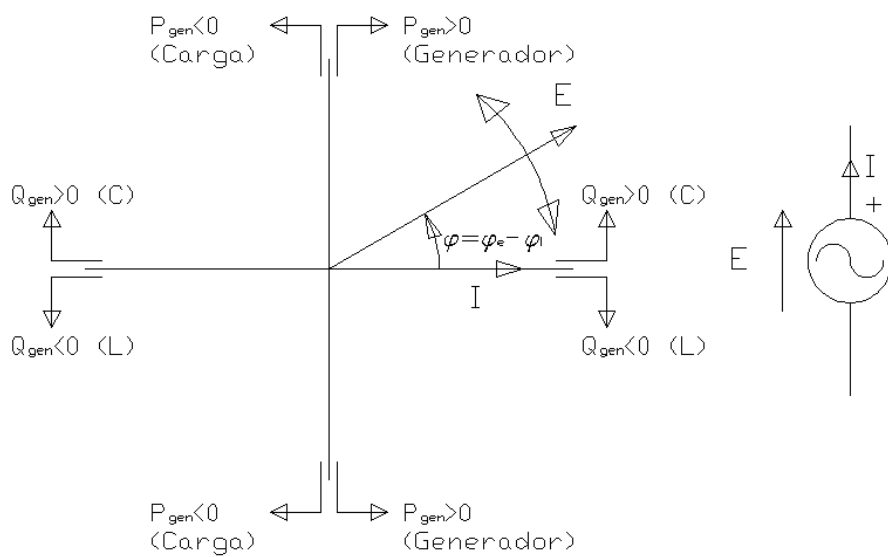
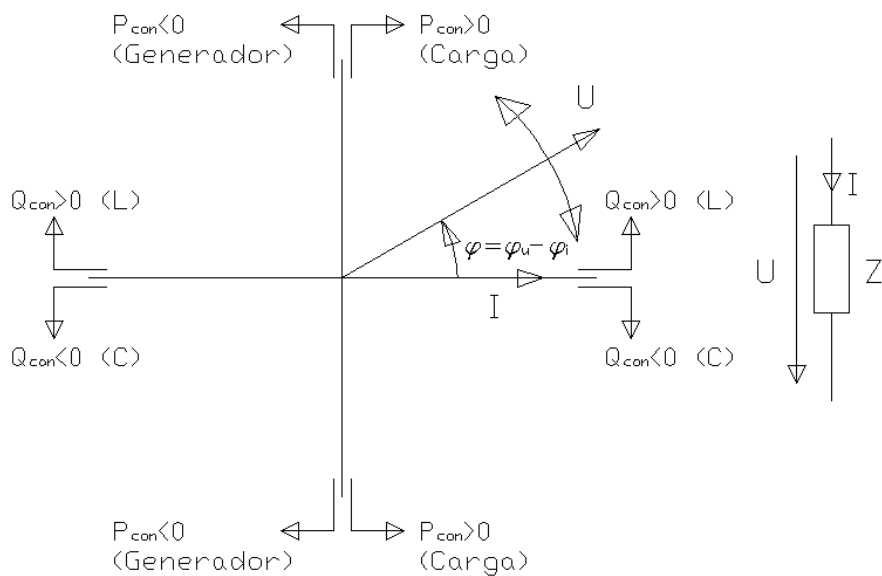
Obviamente, de forma análoga se puede definir la potencia compleja aparente, activa y reactiva generada por una fuente:

$$\vec{S}_{gen} = E \cdot \vec{I}^* = E \cdot I \cdot e^{j(\varphi_e - \varphi_i)}$$

$$P_{gen} = MED[p_{gen}(t)] = Re[\vec{S}_{gen}] = E \cdot I \cdot \cos(\varphi_e - \varphi_i)$$

$$Q_{gen} = MÁX[p_{X,gen}(t)] = Im[\vec{S}_{gen}] = E \cdot I \cdot \operatorname{sen}(\varphi_e - \varphi_i)$$

Debe observarse que, con los convenios de signos que hemos establecido, con los valores apropiados de tensión o fuerza electromotriz y corriente una impedancia o una fuente puede funcionar consumiendo (carga) o generando potencia activa y consumiendo (carácter inductivo, L) o generando (carácter capacitivo, C) potencia reactiva. En los diagramas siguientes se considera el fasor de corriente inmóvil y se indica el carácter de P y Q para cada posición del fasor U o del fasor E :



6.- Factor de potencia. Energía activa y reactiva

Como la finalidad de los sistemas eléctricos y de las máquinas es convertir la energía electromagnética en otra forma de energía útil (calor, movimiento, luz, ...), al cociente entre la potencia activa (la que se convierte en otra forma de energía) y la potencia aparente de un sistema se denomina *factor de potencia*.

$$\text{factor de potencia} = \frac{P}{S} = \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

La energía en régimen estacionario sinusoidal, una vez definidas P , Q y S , es más cómodo definirla en estos términos. Así, se denomina:

- Energía activa: $W_a = \int P \cdot dt$, cuya unidad habitual es el $\text{kW} \times \text{h}$
- Energía reactiva: $W_x = \int Q \cdot dt$, cuya unidad habitual es el $\text{kvar} \times \text{h}$
- Energía aparente: $W_s = \int S \cdot dt$, cuya unidad habitual es el $\text{kVA} \times \text{h}$

Cada tipo de energía se mide con los contadores apropiados, en nuestro país se utilizan los contadores de energía activa y los contadores de energía reactiva.

7.- Teorema de Boucherot

Este Teorema es una aplicación al régimen estacionario sinusoidal del *principio de conservación de la energía*. Puede enunciarse:

$$\sum_{\forall \text{ generador}} \vec{S}_{\text{generada}} = \sum_{\forall \text{ carga}} \vec{S}_{\text{consumida}}$$

O, equivalentemente:

$$\sum_{\forall \text{ generador}} P_{\text{generada}} = \sum_{\forall \text{ carga}} P_{\text{consumida}}$$

$$\sum_{\forall \text{ generador}} Q_{\text{generada}} = \sum_{\forall \text{ carga}} Q_{\text{consumida}}$$

- La 1ª LdK aplicada a un nudo (p) de un circuito con (n) nudos es:
 $\vec{I}_{p1} + \vec{I}_{p2} + \dots + \vec{I}_{pn} = 0$, siendo $\vec{I}_{pj}$ la corriente que circula desde el nudo (p) hacia el nudo (j)
- Conjugando esta ecuación y repitiéndolo para todos los nudos se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & +\vec{I}_{12}^* & +\vec{I}_{13}^* & +\dots & +\vec{I}_{1n}^* & = & 0 \\ \vec{I}_{21}^* & + & 0 & +\vec{I}_{23}^* & +\dots & +\vec{I}_{2n}^* & = & 0 \\ & & & & & & & \dots\dots\dots \\ \vec{I}_{n1}^* & +\vec{I}_{n2}^* & +\vec{I}_{n3}^* & +\dots & + & 0 & = & 0 \end{array}$$

Tomando un nudo como referencia de potenciales y llamando U_j a la diferencia de potencial (tensión) entre el nudo (j) y el de referencia, se puede multiplicar cada una de las ecuaciones anteriores por el potencial de su nudo y sumarlas todas, teniendo en cuenta que el sistema precedente es simétrico y que $\vec{I}_{\#}^* = -\vec{I}_{\#}^*$:

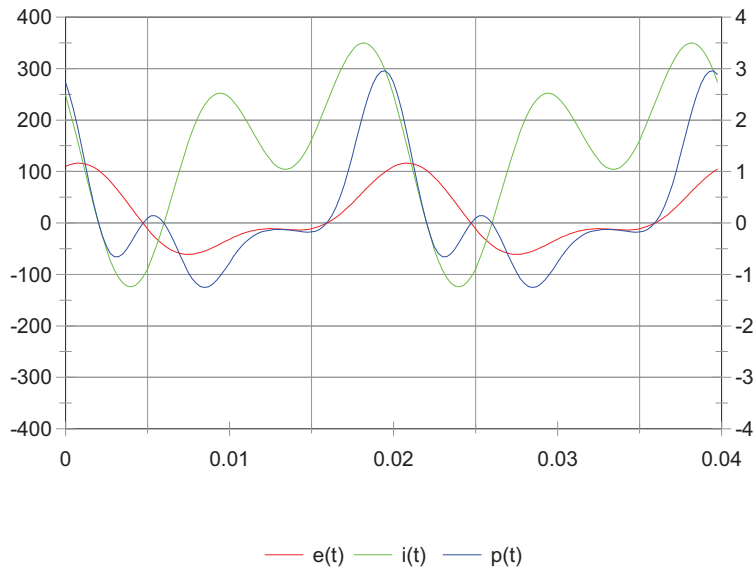
$$(\vec{U}_1 - \vec{U}_2) \cdot \vec{I}_{12}^* + (\vec{U}_1 - \vec{U}_3) \cdot \vec{I}_{13}^* + \dots + (\vec{U}_{n-1} - \vec{U}_n) \cdot \vec{I}_{n-1,n}^* = 0$$

Así, queda: $\vec{U}_{12} \cdot \vec{I}_{12}^* + \vec{U}_{13} \cdot \vec{I}_{13}^* + \dots + \vec{U}_{n-1,n} \cdot \vec{I}_{n-1,n}^* = 0$, que, pasando a un lado de la igualdad las potencias debidas a las fuentes y al otro las debidas a las cargas, corresponde con el enunciado del Teorema de Boucherot.

8.- Circuitos en régimen estacionario no-sinusoidal

En los circuitos eléctricos alimentados por fuentes de corriente alterna las tensiones y las corrientes no siempre son sinusoidales, por ejemplo, cuando las fuentes de potencia no entregan fuerzas electromo-

trices o corrientes sinusoidales, las tensiones y las corrientes en los circuitos dejan de ser sinusoidales pero continúan siendo periódicas. La herramienta de análisis más sencilla consiste en realizar el *Desarrollo en Serie de Fourier* de las fuerzas electromotrices o de las corrientes, con lo que se obtiene una suma de un cierto valor constante y una serie de sinusoidales, para aplicar a continuación el Teorema de Superposición a cada uno de los sumandos del desarrollo.



Algunas de las consecuencias de que las tensiones y corrientes no sean sinusoidales son:

- La potencia activa y la potencia aparente mantienen su significado, pero la potencia reactiva deja de tener el sentido físico que le habíamos asignado y es, simplemente, $Q = \sqrt{S^2 - P^2}$
- El factor de potencia ya no es el $\cos(\varphi_u - \varphi_i)$

A los términos del *Desarrollo en Serie de Fourier* que no tienen la frecuencia fundamental (por ejemplo 50 Hz) se les denomina armónicos. La presencia de armónicos en los sistemas de corriente alterna tiene,

normalmente, consecuencias negativas porque implica peor aprovechamiento de las máquinas y mayores pérdidas de potencia.

Ejemplos:

5.1.1. Un centro de consumo demanda una potencia de 250 MW. La línea que transporta esta potencia desde la planta generadora es de 70 km y se ha realizado con conductor de aluminio de resistividad $\rho = 0,024 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$. Determinar la sección de conductor que se necesita para que la potencia perdida en el transporte sea el 5% de la potencia demandada.

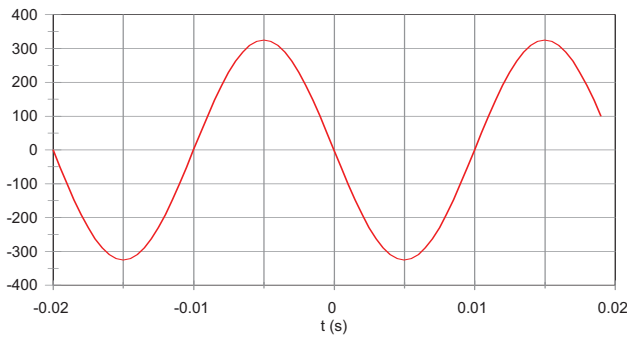
a) Si la tensión en el centro de consumo es 220 V

b) Si esta tensión es 220 kV

Solución: a) La intensidad debe ser $1,14 \cdot 10^6$ A. ¡Se necesita un conductor de sección $347,1 \text{ m}^2$!

b) La intensidad es 1,14 kA. Es suficiente una sección de 347 mm^2 .

5.2.1. Para cada una de las representaciones gráficas, determinar la expresión temporal (real) y fasorial (compleja) de la magnitud representada.



Solución:

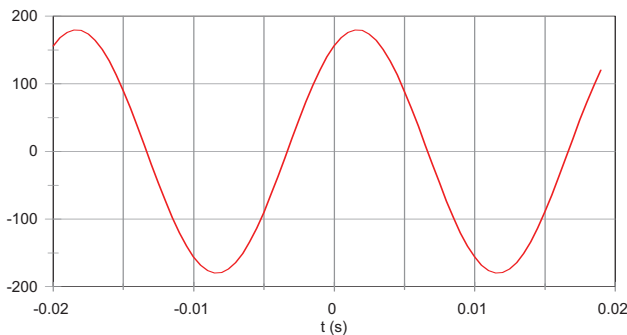
a) El periodo es $T = 20$ ms, la frecuencia $f = 50$ Hz, la pulsación $\omega = 100 \pi$ rad/s, el ángulo inicial es $\varphi_0 = 90^\circ$

Forma temporal:

$$325 \cdot \cos(100 \pi t + 90^\circ)$$

Forma fasorial:

$$230 \cdot e^{j(100 \pi t + 90^\circ)}$$



b) $T = 20$ ms, $f = 50$ Hz,

$\omega = 100 \pi$ rad/s,

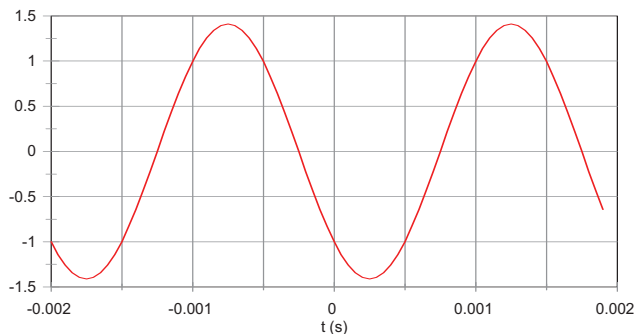
$\varphi_0 = -30^\circ$

Forma temporal:

$$180 \cdot \cos(100 \pi t - 30^\circ)$$

Forma fasorial:

$$127 \cdot e^{j(100 \pi t - 30^\circ)}$$



c) $T = 2 \text{ ms}$, $f = 500 \text{ Hz}$,
 $\omega = 1000 \pi \text{ rad/s}$, $\phi_0 = 135^\circ$

Forma temporal:

$$1,41 \cdot \cos(1000 \pi t + 135^\circ)$$

Forma fasorial:

$$1 \cdot e^{j(1000 \pi t + 135^\circ)}$$

5.2.2. Representar en forma temporal y fasorial la tensión y la intensidad en los elementos siguientes:

a) $R = 10 \Omega$ $i_R = 14,1 \cdot \cos(100\pi t - 45^\circ) \text{ (A)}$

b) $L = 1 \text{ H}$ $i_L = 14,1 \cdot \cos(100\pi t + 30^\circ) \text{ (A)}$

c) $C = 1 \text{ F}$ $u_C = 14,1 \cdot \cos(100\pi t) \text{ (V)}$

¿Cual es la impedancia de cada uno?

Solución:

a) $u_R = 141 \cdot \cos(100\pi t - 45^\circ) \text{ (V)}$

$$\vec{I}_R = 10 \angle -45^\circ \text{ (A)}$$

$$Z_R = R = 10 \Omega$$

$$\vec{U}_R = 100 \angle -45^\circ \text{ (V)}$$

b) $u_L = 1410 \pi \cdot \cos(100\pi t + 120^\circ) \text{ (V)}$

$$\vec{I}_L = 10 \angle 30^\circ \text{ (A)}$$

$$Z_L = j \cdot X_L = 100\pi \angle +90^\circ \Omega$$

$$\vec{U}_L = 1000 \cdot \pi \angle +120^\circ \text{ (V)}$$

c) $i_C = 1410 \pi \cdot \cos(100\pi t + 90^\circ) \text{ (A)}$

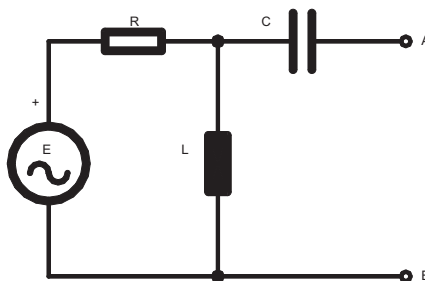
$$\vec{U}_C = 10 \angle 0^\circ \text{ (V)}$$

$$Z_C = -j \cdot X_C = \frac{1}{100\pi} \angle -90^\circ \Omega$$

$$\vec{I}_C = 1000 \cdot \pi \angle +90^\circ \text{ (A)}$$

5.2.3. Obtener el equivalente de Thévenin entre A y B.

$R = 100 \Omega$	$L = 1 \text{ H}$
$C = 10 \mu\text{F}$	$E = 100 \text{ V},$ 50 Hz



Solución: La impedancia del dipolo pasivo es:

$$Z_{\text{PASIVO}} = Z_{\text{Th}} = 90,80 - j 289,41 \, \Omega.$$

$$\text{La tensión } U_{\text{AB}} \text{ en vacío: } U_{\text{AB},0} = U_{\text{AB}}(I_{\text{AB}}=0) = E_{\text{Th}} = 95,29 \, \text{V}$$

El argumento de E_{Th} depende del origen de ángulos que se considere.

5.3.1 Un circuito está formado por una fuente de tensión, $e(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(100\pi t)$ y tres elementos pasivos $R = 10 \, \Omega$, $L = 31,83 \, \text{mH}$ y $C = 636,62 \, \mu\text{F}$ en serie. Determinar:

- Impedancia de cada elemento y del conjunto de elementos pasivos
- Expresión fasorial y temporal de la corriente en el circuito
- Expresión fasorial y temporal de la tensión en cada elemento pasivo
- Triángulo de impedancias y triángulo de tensiones.

Solución: a) $R = 10 \, \Omega$, $X_L = 10 \, \Omega$, $X_C = 5 \, \Omega$. $\vec{Z} = 10 + j5 \, \Omega$

$$\vec{I} = 8,94 \cdot e^{j(100\pi t - 26,56^\circ)} \approx 8,94 \angle -26,56^\circ \, \text{A}$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 8,94 \cdot \cos(100\pi t - 26,56^\circ)$$

$$\vec{U}_R = R \cdot \vec{I} = 89,94 \cdot e^{j(100\pi t - 26,56^\circ)} \approx 89,94 \angle -26,56^\circ \, \text{V}$$

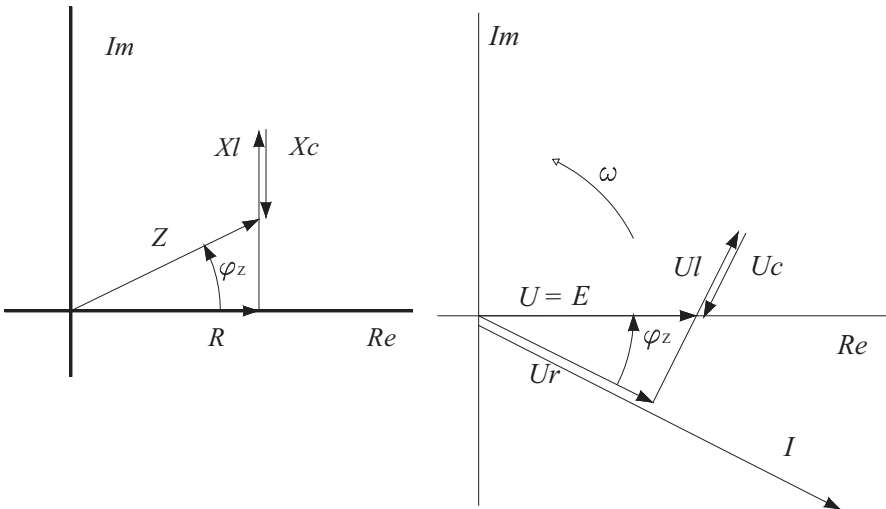
$$\vec{U}_L = j \cdot X_L \cdot \vec{I} = 89,94 \cdot e^{j(100\pi t + 63,43^\circ)} \approx 89,94 \angle +63,43^\circ \, \text{V}$$

$$\vec{U}_C = -j \cdot X_C \cdot \vec{I} = 44,72 \cdot e^{j(100\pi t - 116,57^\circ)} \approx 44,72 \angle -116,57^\circ \, \text{V}$$

$$u_R(t) = \sqrt{2} \cdot 89,94 \cdot \cos(100\pi t - 26,56^\circ)$$

$$u_L(t) = \sqrt{2} \cdot 89,94 \cdot \cos(100\pi t + 63,43^\circ)$$

$$u_C(t) = \sqrt{2} \cdot 44,72 \cdot \cos(100\pi t - 116,57^\circ)$$



5.3.2 Un circuito está formado por una fuente de tensión, $e(t)=325\cdot\cos(100\pi t)$ y tres elementos pasivos $R=10\ \Omega$, $L=159,15\text{ mH}$ y $C=106,10\ \mu\text{F}$ en serie. Determinar:

- Impedancia de cada elemento y del conjunto de elementos pasivos
- Expresión fasorial y temporal de la corriente en el circuito
- Expresión fasorial y temporal de la tensión en cada elemento pasivo
- Triángulo de impedancias y triángulo de tensiones.

Solución: a) $R=10\ \Omega$, $X_L=50\ \Omega$, $X_C=30\ \Omega$. $\vec{Z}=10+j20\ \Omega=22,36\angle 63,43^\circ\ \Omega$

$$\vec{I}=10,28\cdot e^{j(100\pi t-63,43^\circ)}\equiv 10,28\angle -63,43^\circ\text{ A}$$

$$i(t)=\sqrt{2}\cdot 10,28\cdot\cos(100\pi t-63,43^\circ)$$

$$\vec{U}_R=R\cdot\vec{I}=102,77\cdot e^{j(100\pi t-63,43^\circ)}\equiv 102,77\angle -63,43^\circ\text{ V}$$

$$\vec{U}_L=j\cdot X_L\cdot\vec{I}=513,87\cdot e^{j(100\pi t+26,56^\circ)}\equiv 513,87\angle +26,56^\circ\text{ V}$$

$$\vec{U}_C=-j\cdot X_C\cdot\vec{I}=308,32\cdot e^{j(100\pi t-153,43^\circ)}\equiv 308,32\angle -153,43^\circ\text{ V}$$

$$u_R(t)=\sqrt{2}\cdot 102,77\cdot\cos(100\pi t-63,43^\circ)$$

$$u_L(t)=\sqrt{2}\cdot 513,87\cdot\cos(100\pi t+26,56^\circ)$$

$$u_C(t)=\sqrt{2}\cdot 308,32\cdot\cos(100\pi t-153,43^\circ)$$

d) Es similar al obtenido en el problema anterior

5.3.3 Un circuito está formado por una fuente de tensión, $e(t)=325\cdot\cos(100\pi t)$ y tres elementos pasivos $R=10\ \Omega$, $L=159,15\text{ mH}$ y $C=106,10\ \mu\text{F}$ en paralelo. Determinar:

- Admitancia de cada elemento y del conjunto de elementos pasivos
- Expresión fasorial y temporal de la corriente en cada elemento
- Triángulo de admitancias y triángulo de corrientes.

Solución: a) $G=\frac{1}{R}=\frac{1}{10}=0,1\ \Omega^{-1}$

$$B_L=\frac{1}{\omega L}=20\text{ m}\Omega^{-1}$$

$$B_C=\omega C=33,33\text{ m}\Omega^{-1}$$

$$\vec{Y}=100+j13,33\text{ m}\Omega^{-1}=100,9\angle 7,59^\circ\text{ m}\Omega^{-1}$$

$$\vec{I}_R=G\cdot\vec{U}=22,98\cdot e^{j(100\pi t)}\equiv 22,98\angle 0^\circ\text{ A}$$

$$\vec{I}_L=-j\cdot B_L\cdot\vec{U}=4,60\cdot e^{j(100\pi t-90^\circ)}\equiv 4,60\angle -90^\circ\text{ A}$$

$$\vec{I}_C=j\cdot B_C\cdot\vec{U}=7,66\cdot e^{j(100\pi t+90^\circ)}\equiv 7,66\angle +90^\circ\text{ A}$$

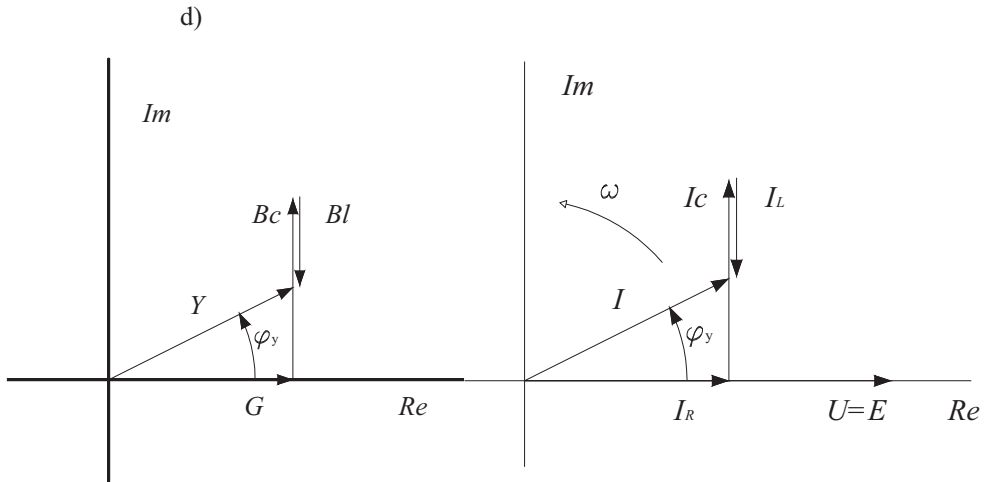
$$\vec{I}=Y\cdot\vec{U}=23,18\cdot e^{j(100\pi t+7,59^\circ)}\equiv 23,18\angle +7,59^\circ\text{ A}$$

$$i_R(t)=\sqrt{2}\cdot 22,98\cdot\cos(100\pi t)$$

$$i_L(t)=\sqrt{2}\cdot 4,60\cdot\cos(100\pi t-90^\circ)$$

$$i_C(t)=\sqrt{2}\cdot 7,66\cdot\cos(100\pi t+90^\circ)$$

$$i(t)=\sqrt{2}\cdot 23,18\cdot\cos(100\pi t+7,59^\circ)$$



5.4.1 Un receptor se alimenta a 250 V mediante una línea monofásica de impedancia $Z_L = 1 + j0,5 \, \Omega$. La impedancia del receptor es $25 \angle 45^\circ \, \Omega$. Determinar:

- Fasor de corriente en la línea de alimentación. Considerar origen de ángulos la tensión en el receptor
- Caída de tensión en la línea
- $u\%$ si la tensión nominal de este sistema eléctrico es 250 V

Solución: a) $\vec{I} = 10 \angle -45^\circ \, A$

b) $\vec{U}_{ZL} = \vec{Z}_L \cdot \vec{I} = 11,18 \angle -18,43^\circ \, V$, pero se denomina caída de tensión a la diferencia de módulos entre la tensión en el origen y en el final de la línea:

$$\Delta U = |U_{origen}| - |U_{final}| \approx (R_L \cdot \cos \varphi + X_L \cdot \sin \varphi) \cdot I = 10,607 \, V$$

El cálculo exacto de la tensión en el origen es:

$$\vec{U}_{origen} = \vec{U}_{final} + \vec{U}_{ZL} = 260,63 \angle -0,777^\circ \, V$$

Por lo que ΔU vale, con más precisión, 10,631 V

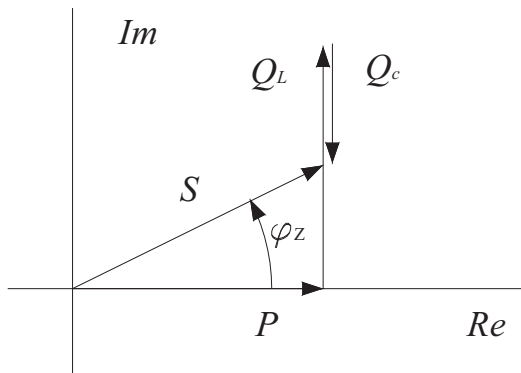
c) $u\% = 4,24\%$

5.6.1 Para el circuito del problema 5.3.1, determinar:

- P, Q y S en cada elemento pasivo.
- Potencia aparente compleja $\vec{S}$ generada por la fuente.
- Dibujar el triángulo de potencias.

Solución: a) $P_R = 800 \, W$, $Q_L = 800 \, var$, $Q_C = 400 \, var$

$$b) \vec{S} = 800 + j400 = 894,43 \cdot e^{j26,56^\circ} \text{ VA}$$



5.6.2 Realizar los mismos apartados del problema anterior para el circuito del problema 5.3.2.

Solución: a) $P = 1056,4 \text{ W}$, $Q_L = 5282,1 \text{ var}$, $Q_C = 3169,3 \text{ var}$

d) $\vec{S} = 1056,43 + j2112,41 = 2361,85 \cdot e^{j63,43^\circ} \text{ VA}$. El aspecto del triángulo de potencias es análogo al del problema anterior.

5.6.3 Realizar los mismos apartados del problema anterior para el circuito del problema 5.3.3.

Solución: a) $P = 5281 \text{ W}$, $Q_L = 1056 \text{ var}$, $Q_C = 1760 \text{ var}$

b) $\vec{S} = 5281 - j704 = 5327 \cdot e^{-j7,59^\circ} \text{ VA}$. El aspecto del triángulo de potencias es análogo al del problema anterior, pero en este caso $Q_C > Q_L$ y S se sitúa en el cuarto cuadrante.

5.8.1 Se conectan en paralelo tres receptores al final de una línea monofásica de impedancia total $\vec{Z}_{\text{línea}} = 5,2 + j9,4 \text{ m}\Omega$. La línea parte de un generador de impedancia interna $\vec{Z}_{\text{generador}} = 1,9 + j3,8 \text{ m}\Omega$.

Los receptores se están alimentando a su tensión y frecuencia nominal (220 V, 50 Hz).

- Corriente suministrada por la fuente.
- Tensión en bornes de la fuente.
- Caída de tensión en la línea en valor absoluto y porcentual
- Potencia compleja que consumen los receptores y que entrega la fuente

$P_1 = 100 \text{ kW}$	$\text{fdp}_1 = 0,49 \text{ inductivo}$
$P_2 = 30 \text{ kW}$	$\text{fdp}_2 = 1$
$P_3 = 60 \text{ kW}$	$\text{fdp}_3 = 0,80 \text{ capacitivo}$

- e) Potencia y capacidad del banco de condensadores a colocar en paralelo con los receptores para obtener un factor de potencia 0,9 inductivo en el conjunto receptores + condensador

- f) Nueva corriente de línea

Solución: a) Lo más sencillo es calcular la potencia que consumen todos los receptores y dividir esta suma entre la tensión que se aplica a los receptores, se obtiene $I = 1054 \text{ A}$, con $\phi_Z = \phi_S = 34,97^\circ$

b) $U_{\text{origen de la línea}} = U_{\text{bornes del generador}} = 230,2 \angle 36,2^\circ \text{ V}$ (tomando I como origen)

c) $\Delta U = 10,2 \text{ V}$, $u\% = 4,65\%$ de la tensión nominal. Este apartado y el anterior se han calculado exactamente. También puede utilizarse la expresión aproximada porque el argumento de la tensión en el inicio de la línea no se ha pedido.

d) La potencia que consumen los receptores es la suma (compleja) de las potencias de cada uno de ellos: $S_{\text{receptores}} = 190 \text{ kW} + j 132,9 \text{ kVar}$. Sin embargo, el generador también entrega la potencia que consume la propia línea, por lo que la potencia generada es ligeramente distinta: $S_{\text{generada}} = 195,8 \text{ kW} + j 143,3 \text{ kvar}$

e) Si la tensión en bornes de los receptores se mantiene invariable, el valor absoluto de potencia reactiva del banco de condensadores es $Q_C = 40,88 \text{ kvar}$. La capacidad necesaria es $C = 2688,7 \mu\text{F}$

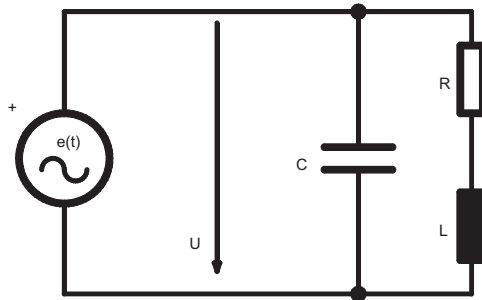
f) La nueva corriente de línea es $I = 959,6 \text{ A}$, esto es, realizando el mismo trabajo, la corriente se ha reducido casi un 9% del valor que tenía inicialmente.

5.9.1 La fuente de tensión entrega una fuerza electromotriz periódica cuyo desarrollo en serie de Fourier resulta:

$$e(t) = 14,14 + 70,7 \cos(\omega t) + 35,36 \cos(2\omega t - \frac{\pi}{4}), \text{ con } \omega = 100 \pi \text{ rad/s.}$$

Los elementos pasivos valen: $R = 10 \Omega$, $L = 500 \text{ mH}$ y $C = 100 \mu\text{F}$. Determinar:

- a) La impedancia de cada elemento pasivo a cada frecuencia de $e(t)$
 b) La corriente en cada elemento
 c) El valor eficaz de la fuerza electromotriz y de la corriente en el generador. Distorsión armónica total.
 d) La potencia generada



Solución: a) Aplicando la expresión de impedancia de una resistencia (R), una bobina (ωL) y un condensador ($1/\omega C$) a las frecuencias de las componentes de fuerza electromotriz de la fuente ($\omega_0=0$, esto es corriente continua, $\omega_1=100 \pi$ rad/s y $\omega_2=200 \pi$ rad/s) se obtiene:

	ω_0	ω_1	ω_2
$Z_R = R$	10Ω	10Ω	10Ω
$Z_L = j\omega L$	0	$j157,08 \Omega$	$j314,16 \Omega$
$Z_C = -j/\omega C$	∞	$-j31,83 \Omega$	$-j15,91 \Omega$

b) Aplicando el Teorema de Superposición se analiza el circuito alimentado, sucesivamente, por una fuente de tensión continua (de $E_0 = 14,14$ V), una fuente de 50 Hz y valor eficaz $E_1 = 50$ V y una fuente de 100 Hz y valor eficaz $E_2 = 25$ V. La corriente provocada por cada fuente es $I_i = \frac{E_i}{Z_i}$

	ω_0	ω_1	ω_2
$I_R = I_L$ (A)	1,414	$0,318 \angle -1,507$ rad	$0,08 \angle -2,324$ rad
I_C (A)	0	$1,57 \angle 1,57$ rad	$1,57 \angle 0,785$ rad
I_E (A)	1,414	$1,25 \angle 1,554$ rad	$1,49 \angle 0,785$ rad

La expresión temporal de las corrientes es:

$$i_R(t) = i_L(t) = 1,41 + \sqrt{2} \cdot 0,318 \cdot \cos(100\pi t - 1,507) + \sqrt{2} \cdot 0,08 \cdot \cos(200\pi t - 2,324)$$

$$i_C(t) = \sqrt{2} \cdot 1,57 \cdot \cos(100\pi t + 1,57) + \sqrt{2} \cdot 1,57 \cdot \cos(200\pi t + 0,785)$$

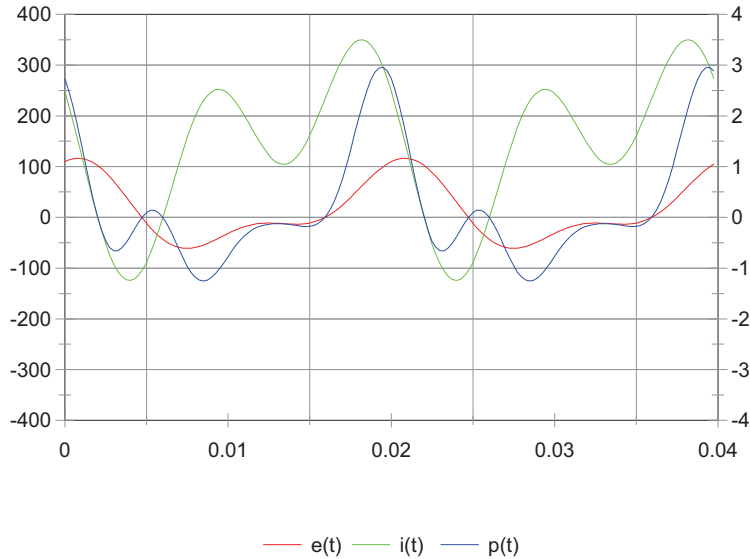
$$i_E(t) = 1,41 + \sqrt{2} \cdot 1,25 \cdot \cos(100\pi t + 1,554) + \sqrt{2} \cdot 1,49 \cdot \cos(200\pi t + 0,783)$$

c) El valor eficaz es la raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de la magnitud. Para funciones suma de sinusoides resulta:

$$E_{\text{eficaz}} = \sqrt{\frac{\text{Medio}_0^2}{2} + E_{\text{eficaz}_1}^2 + \dots + E_{\text{eficaz}_n}^2}$$

en este caso, $E = 55,9$ V, $I = 2,19$ A

Esto es así porque el valor medio del producto de funciones sinusoidales de distinta frecuencia es cero.



La distorsión armónica total (THD, por sus siglas en inglés) puede definirse como el valor eficaz de las componentes de frecuencia distinta de la fundamental dividido del valor eficaz de la componente fundamental. En este circuito, para la fuerza electromotriz generada $\text{THD}\% = 53,85\%$ y para la corriente en el generador $\text{THD}\% = 143\%$, valores, ambos, muy superiores a los que se consideran normales en las redes públicas.

d) La potencia generada puede obtenerse multiplicando: $p_{\text{gen}}(t) = e(t) \cdot i(t)$. Se observa que la deformación en la tensión aplicada ha provocado una deformación aún mayor en la corriente y, como resultado, la forma de la potencia es claramente no sinusoidal. Puede determinarse su valor medio $P = 21,1 \text{ W}$ (obtenido de forma numérica o al hacer la integral de valor medio de $p(t)$ y obtener que $P = P_0 + P_1 + P_2$) y también su valor aparente $S = 55,9 \cdot 2,2 = 122,4 \text{ VA}$. Por lo que el factor de potencia es 0,17 (pero esto ya no es el coseno de ningún ángulo). En todo caso la presencia de armónicos implica un menor aprovechamiento de los sistemas eléctricos, por esto se evitan.

Problemas:

5.1.2. Un imán permanente gira con velocidad $\omega = 100 \pi$ rad/s en el interior de una bobina plana de 100 espiras que define una superficie de 1 m^2 . El imán provoca una inducción $B = 1 \text{ T}$ en toda la superficie definida por la espira, cuando los versores de inducción y superficie se alinean. Considerando como origen de tiempos el momento en que coinciden ambos versores:

- Expresión temporal del flujo magnético que atraviesa la bobina
- Fuerza electromotriz generada en la bobina.

Solución: a) $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot S \cdot \cos(\omega t) = \cos(100\pi t) \quad (T)$

b) $e = -N \frac{d\Phi}{dt} = 31416 \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (V)$

5.2.4 Entre los bornes A y B de un dipolo se ha medido en régimen estacionario sinusoidal:

$U_{AB,0} = 95,29 \text{ V}$, $I_{AB,cc} = 0,3142 \text{ A}$. Además, cuando se conecta entre A y B un condensador se mide $U_{AB} = 65,20 \text{ V}$, $I_{AB} = 0,1024 \text{ A}$. Obtener el equivalente de Thévenin y el equivalente de Norton.

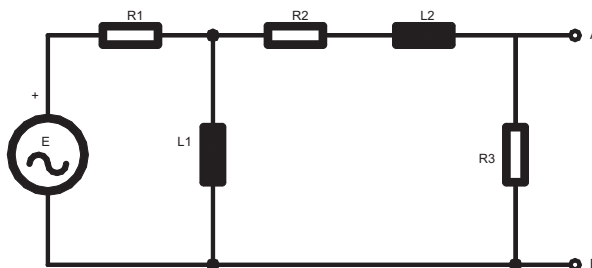
Solución: Los valores que se piden coinciden con los obtenidos en 5.2.3, si bien, en este caso, el argumento de E_{Th} y de I_N no está definido. Una forma sencilla de obtenerlo es escribiendo la ecuación del circuito equivalente con la carga conectada entre A y B, para el equivalente de Thévenin: $\vec{E}_{Th} = \vec{U}_{AB} + \vec{Z}_{Th} \cdot \vec{I}_{AB}$. En esta ecuación se puede tomar como origen la corriente, con lo que $\vec{U}_{AB}$ se sitúa en -90° . Las incógnitas son φ_{Zth} y $\varphi_{E_{th}}$. Se resuelve con sencillez elevando al cuadrado la ecuación de la parte real y de la parte imaginaria y sumando. Se obtienen dos soluciones:

Solución 1: $\varphi_{Zth} = -72,6^\circ$

Solución 2: $\varphi_{Zth} = -107,4^\circ$

Pero, como la impedancia que corresponde a los elementos pasivos sólo puede presentar argumentos entre $+90^\circ$ y -90° , la solución correcta es la 1ª. Para comprender el significado de las dos soluciones es conveniente resolverlo también gráficamente.

5.2.5 Obtener el equivalente de Thévenin y el equivalente de Norton entre los bornes A y B del circuito.

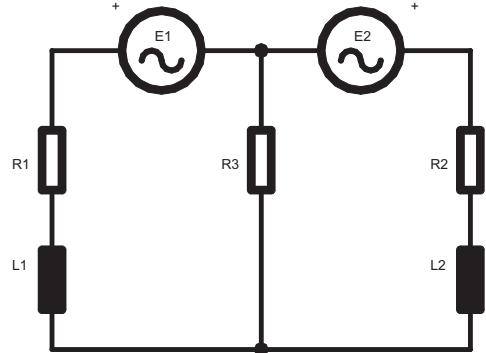


Solución:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{Th} &= 20 \angle 0 \text{ V} \\ \vec{I}_N &= 5,56 \angle -23,06 \text{ A} \\ \vec{Z}_{Th} &= 3,60 \angle 23,06^\circ \Omega\end{aligned}$$

$E = 55,8 \angle -17,4^\circ \text{ V}$	$R_1 = 5 \Omega$	$R_2 = 2 \Omega$
$R_3 = 6 \Omega$	$X_{L1} = 5 \Omega$	$X_{L2} = 3 \Omega$

5.2.6 Determinar las tensiones y corrientes en cada elemento en régimen estacionario sinusoidal.



$E_1 = 220 \angle -120^\circ \text{ V}$	$R_1 = 4,8 \Omega$	$R_2 = 5 \Omega$	$R_3 = 10 \Omega$
$E_2 = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$	$L_1 = 28,6 \text{ mH}$	$L_2 = 28,6 \text{ mH}$	$f = 50 \text{ Hz}$

Solución: Considerando para las fuentes sentidos coincidentes con su fuerza electromotriz, en los elementos pasivos que pertenecen a una sola malla sentidos horarios y en R_3 de arriba a abajo, se obtiene:

$$I_{R1} = I_{L1} = -I_{E1} = 16,22 \angle -20,30^\circ \text{ A}$$

$$I_{R2} = I_{L2} = I_{E2} = 21,50 \angle -39,60^\circ \text{ A}$$

$$I_{R3} = 8,18 \angle 99,50^\circ \text{ A}$$

Multiplicando las corrientes por las impedancias ($X_{L1} = X_{L2} = 9 \Omega$) se obtienen las tensiones:

$$U_{R1} = 77,86 \angle -20,30^\circ \text{ V},$$

$$U_{L1} = 145,98 \angle 69,70^\circ \text{ V}$$

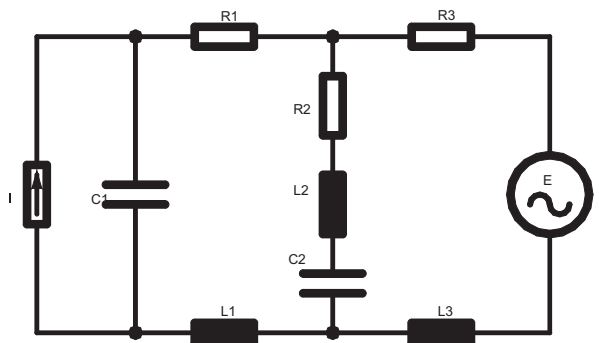
$$U_{R2} = 107,5 \angle -39,60^\circ \text{ V},$$

$$U_{L2} = 193,50 \angle 50,40^\circ \text{ V}$$

$$U_{R3} = 81,8 \angle 99,50^\circ \text{ A}$$

5.2.7 Determinar las tensiones y corrientes en cada elemento en régimen estacionario sinusoidal.

- Por mallas
- Por nudos
- Por superposición



$E = 11500 \angle 0^\circ \text{ V}$	$R_1 = 40 \, \Omega$	$R_2 = 20 \, \Omega$	$R_3 = 30 \, \Omega$
$I = 150 \angle 120^\circ \text{ A}$	$L_1 = 0,75 \text{ H}$	$L_2 = 0,12 \text{ H}$	$L_3 = 0,25 \text{ H}$
$f = 50 \text{ Hz}$	$C_1 = 43 \, \mu\text{F}$	$C_2 = 50 \, \mu\text{F}$	

Solución: a) Para resolver por mallas es muy conveniente transformar la fuente de corriente en paralelo con C_1 en su equivalente de Thévenin: $E_{th} = 9616,2 + j 5551,9 \text{ V}$. Se obtienen las corrientes de malla (en sentido horario):
 $I_1 = 93,0599 \angle -17,1883^\circ \text{ A}$ $I_2 = 149,1301 \angle 148,8776^\circ \text{ A}$

Como E_{th} con C_1 en serie no existen, debe deshacerse este equivalente para obtener las tensiones y corrientes en la fuente de corriente y el condensador real. Considerando para los elementos activos sentidos coincidentes con los de definición y para los elementos pasivos de izquierda a derecha y de arriba a abajo:

Elemento	R_1	R_2	R_3	L_1	L_2
corriente (A)	I_1	$I_1 - I_2$	I_2	$-I_1$	I_{R2}
tensión (V)	3722,4 $\angle -17,1883^\circ$	4810 $\angle -25,7759^\circ$	4473,9 $\angle 148,8776^\circ$	21927 $\angle -107,1883^\circ$	9066,6 $\angle 64,2241^\circ$

Elemento	L_3	C_1	C_2	E	I
corriente (A)	$-I_2$	$I - I_1$	I_{R2}	$-I_2$	I
tensión (V)	11713 $\angle 58,8776^\circ$	16822 $\angle 46,1588^\circ$	9493,9 $\angle 58,8776^\circ$	E	$E_I = U_{C1}$

b) Para resolver por nudos es muy conveniente transformar la fuente de tensión en serie con R_3 y C_3 en su equivalente de Norton: $I_N = 48,808 - j 127,78$ A. Se obtienen las tensiones de nudo (1: superior izquierda, 2: superior derecha, 3: inferior derecha, 0: inferior izquierda):

$$\begin{aligned} U_1 &= 16822 \angle 46,1588^\circ \text{ V} & U_2 &= 15513 \angle 58,5424^\circ \text{ V} \\ U_3 &= 21927 \angle 72,8117^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Como I_N con R_3 y C_3 en paralelo no existen, debe deshacerse este equivalente para obtener las tensiones y corrientes en la fuente de tensión y en la resistencia y el condensador reales. Los valores son, obviamente, idénticos a los obtenidos en el apartado anterior.

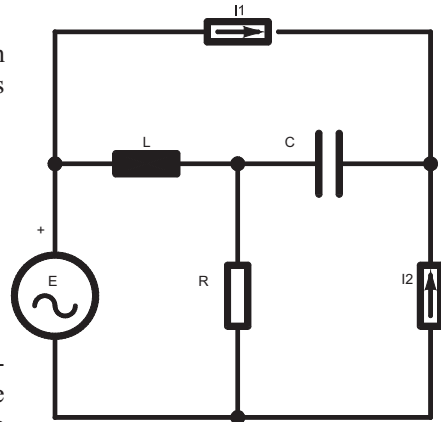
c) Debe anularse la fuente de corriente ($I=0$) y resolver por mallas. Anularse la fuente de tensión ($E=0$) y resolver por nudos. Considerando las mismas denominaciones y sentidos que en los apartados precedentes:

$$\begin{aligned} I_1 &= 32,3991 \angle 18,2392^\circ \text{ A} & I_2 &= 146,6177 \angle -136,7715^\circ \text{ A} \\ U_1 &= 15842 \angle 38,4695^\circ \text{ V} & U_2 &= 15186 \angle 48,4276^\circ \text{ V} \\ U_3 &= 16318 \angle 57,0734^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Sumando apropiadamente, se obtienen los mismos valores que en los apartados anteriores.

5.2.8 Obtener corrientes y tensiones en régimen estacionario a 50 Hz en todos los elementos del circuito.

$E = 4 \angle 0^\circ \text{ V}$	$I_1 = 2 \angle -\pi/4^\circ \text{ A}$	$R = 2 \Omega$
$I_2 = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$	$X_L = 2 \Omega$	$X_C = 1 \Omega$

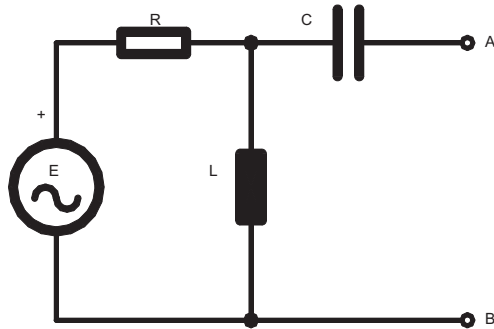


Solución: Puede resolverse por superposición. Anulando las fuentes de corriente se obtiene una corriente en sentido horario en la única malla restante: $1,41 \angle -45^\circ$ A, anulando la fuente de tensión, denominando nudo 1 al que conecta R, L y C y tomando como referencia el nudo inferior-izquierdo, se obtiene una tensión $U_1 = 5,23 \angle 22,50^\circ$ V. Sumando apropiadamente y tomando en los elementos activos sentidos coincidentes con los de definición y para los elementos pasivos de izquierda a derecha y de arriba a abajo:

Elemento	E	I ₁	I ₂	R	X _L	X _C
Corriente (A)	1,41∠0	I ₁	I ₂	3,41∠0	1,41∠90°	3,7∠157,5°
Tensión (V)	E	E ₁₁ = 3,70 ∠-67,7°	E ₁₂ = 6,39 ∠-32,3°	6,82∠0	2,82∠180°	3,7∠67,5°

5.2.9 Obtener el equivalente de Norton.

R= 100 Ω	L= 1 H
C= 10 μF	E= 100 V, 50 Hz



Solución: La impedancia del dipolo pasivo es:

$$Z_{\text{PASIVO}} = Z_{\text{Th}} = 1/Y_N = 90,80 - j 289,41 \, \Omega.$$

La corriente de cortocircuito es: $I_{\text{AB, cc}} = I_{\text{AB}}(U_{\text{AB}}=0) = I_N = 0,3142 \, \text{A}$

El argumento de I_N depende del origen de ángulos que se considere.

5.3.4 En un circuito formado por una resistencia (R), un condensador (C) y una impedancia resistivo-inductiva (Z) conectados en serie con una fuente de tensión (E) sinusoidal se ha medido en régimen estacionario:

E= 230 V	U _R = 138,6 V	U _Z = 277,1 V	U _C = 138,6 V	I= 13,86 A
----------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	------------

Determinar el valor de la impedancia compleja de cada elemento y el argumento de la fuerza electromotriz respecto de la intensidad.

Solución: Como el comportamiento de la resistencia y el condensador son conocidos, su impedancia se obtiene de forma inmediata:

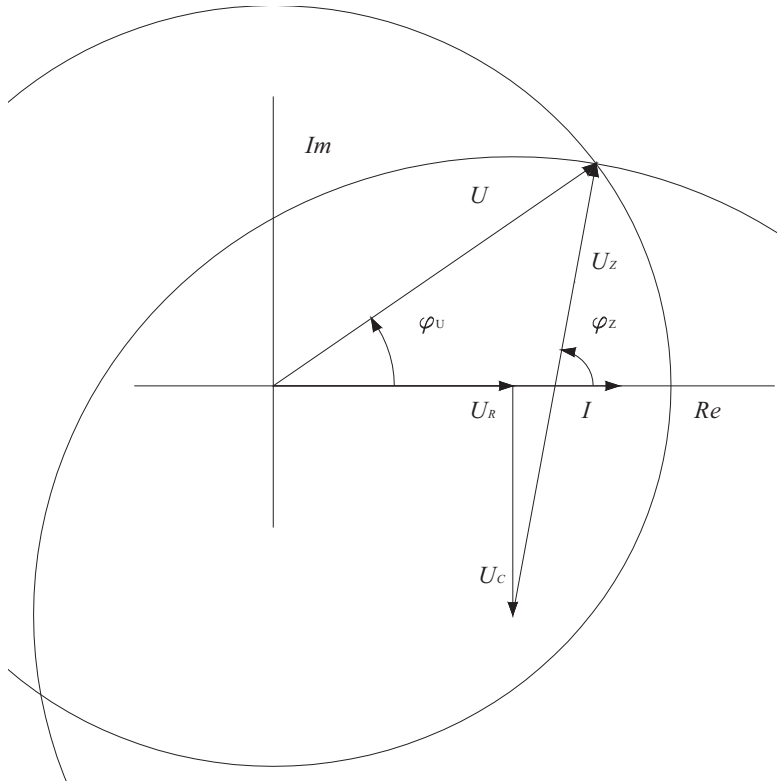
$$R = \frac{U_R}{I} = 10 \angle 0 \, \Omega$$

$$-jX_C = -j \cdot \frac{U_C}{I} = 10 \angle -90^\circ \, \Omega$$

El módulo de la impedancia Z también se obtiene de forma sencilla (20 Ω), sin embargo para obtener su argumento es necesario resolver la ecuación de tensiones del circuito: $\vec{E} = \vec{U}_R + \vec{U}_Z + \vec{U}_C$. Sustituyendo los valores conocidos, tomando por ejemplo como origen de ángulos la corriente: $230 \angle \varphi_E = 138,6 \angle 0 + 277,1 \angle \varphi_Z + 138,6 \angle -90^\circ$.

La solución de este sistema de dos ecuaciones (una la parte real y otra la parte imaginaria) con dos incógnitas reales se realiza de la forma clásica (suma de los cuadrados de ambas partes) y se obtienen dos soluciones. La que corresponde con una impedancia resistivo-inductiva es $\varphi_Z = 80^\circ$ y $\varphi_E - \varphi_I = 35,74^\circ$.

La solución gráfica del problema es igualmente válida:



5.3.5 En un circuito formado por una conductancia (G), una susceptancia capacitiva (B_C) y una admitancia resistivo-inductiva (Y) conectadas en paralelo con una fuente de corriente (I) sinusoidal se ha medido en régimen estacionario:

I= 50 A	$I_G= 26,32$ A	$I_Y= 52,64$ A	$I_C= 26,32$ A	U= 263,2 V
---------	----------------	----------------	----------------	------------

Determinar el valor de la admitancia compleja de cada elemento y el argumento de la fuerza electromotriz respecto de la intensidad.

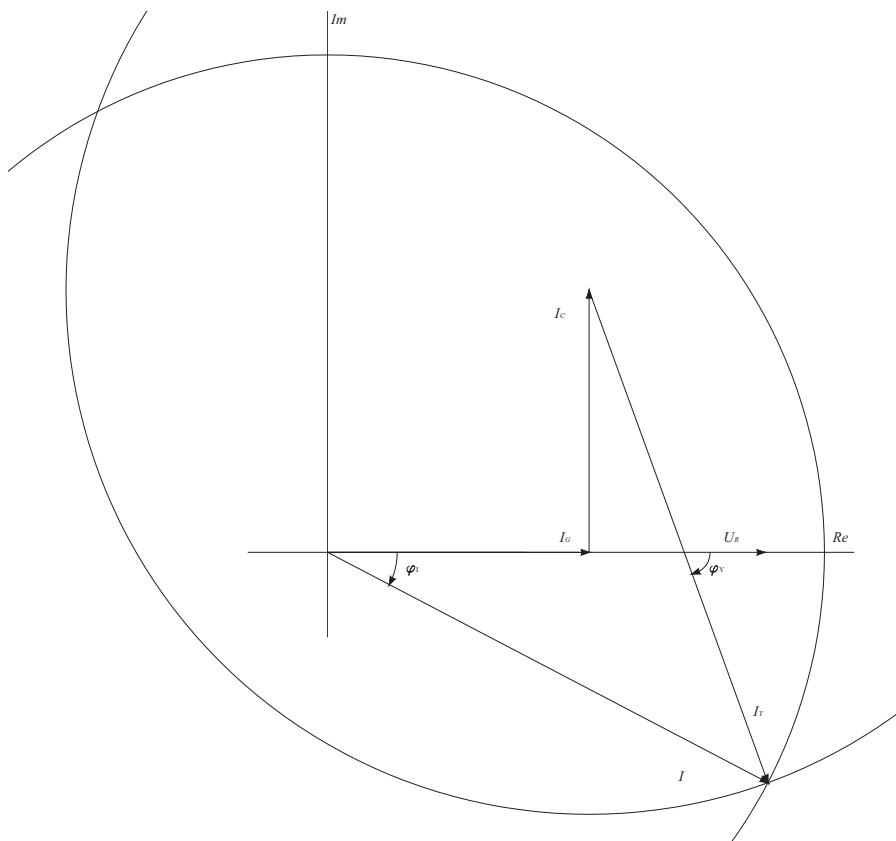
Solución: Como el comportamiento de la resistencia y el condensador son conocidos, su admitancia se obtiene de forma inmediata:

$$G = \frac{I_G}{U} = 0,1 \angle 0^\circ \Omega^{-1}$$

$$jB_C = j \cdot \frac{I_C}{U} = 0,1 \angle +90^\circ \Omega^{-1}$$

El módulo de la admitancia Y también se obtiene de forma sencilla ($0,2 \Omega^{-1}$), sin embargo para obtener su argumento es necesario resolver la ecuación de corrientes del circuito: $\vec{I} = \vec{I}_G + \vec{I}_Y + \vec{I}_C$. Sustituyendo los valores conocidos, tomando por ejemplo como origen de ángulos la tensión: $50 \angle \varphi_I = 26,32 \angle 0^\circ + 52,64 \angle \varphi_Y + 26,32 \angle 90^\circ$. Al resolver de forma análoga al problema anterior se obtienen dos soluciones. La que corresponde con una admitancia resistivo-inductiva es $\varphi_Y = -70^\circ$ y $\varphi_I = 27,57^\circ$.

La solución gráfica del problema es igualmente válida y, como es habitual, más ilustrativa:



5.3.6 El circuito de la figura se alimenta mediante dos fuentes del mismo valor eficaz de tensión, pero la fuente E_T está adelantada 120° respecto la fuente E_R . Además, se han medido todas las tensiones e intensidades

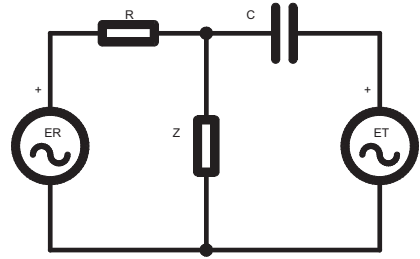
$I_R =$ 4,68 A	$I_Z =$ 1,37 A	$I_C =$ 5,88 A	$U_R =$ 233,9 V	$U_Z =$ 68,7 V	$U_C =$ 293,8 V	$E_R = E_T =$ 230V
-------------------	-------------------	-------------------	--------------------	-------------------	--------------------	-----------------------

Determinar el valor de la impedancia compleja de cada elemento

Solución: Como el comportamiento de la resistencia y el condensador son conocidos, su impedancia se obtiene de forma inmediata:

$$R = \frac{U_R}{I_R} = 50 \angle 0^\circ \Omega$$

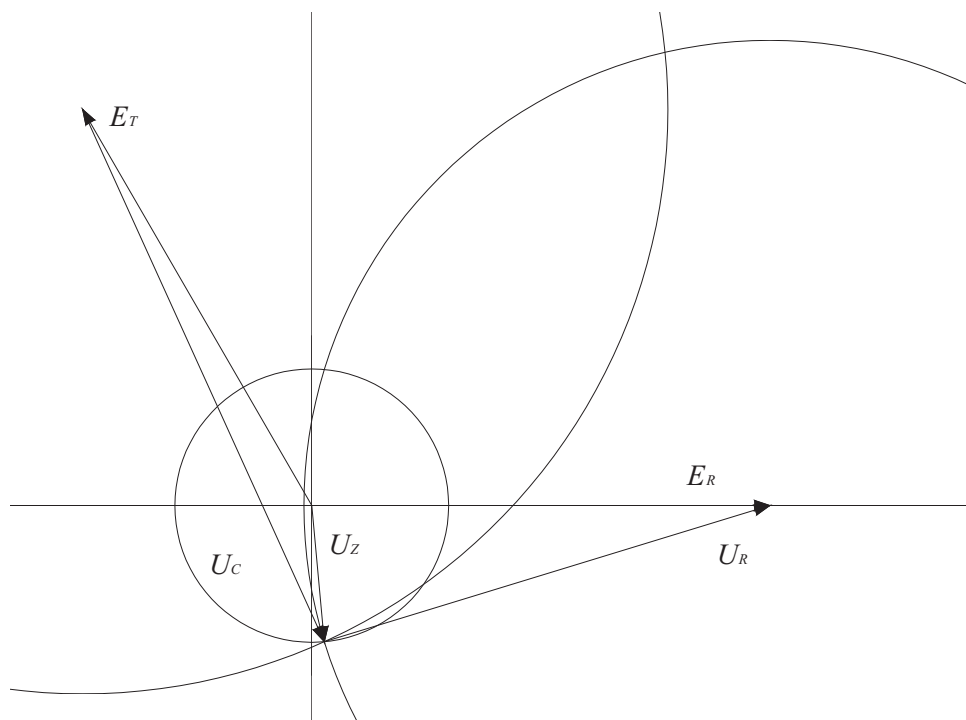
$$-jX_C = -j \cdot \frac{U_C}{I_C} = 50 \angle -90^\circ \Omega$$



El módulo de la impedancia Z también se obtiene de forma sencilla (50Ω), sin embargo para obtener su argumento es necesario resolver el sistema de dos ecuaciones complejas del método de mallas. El origen de ángulos es la fuerza electromotriz E_R y las incógnitas son los argumentos de las dos corrientes de malla y de la impedancia Z . El sistema es, pues, redundante por lo que sólo existirá una solución.

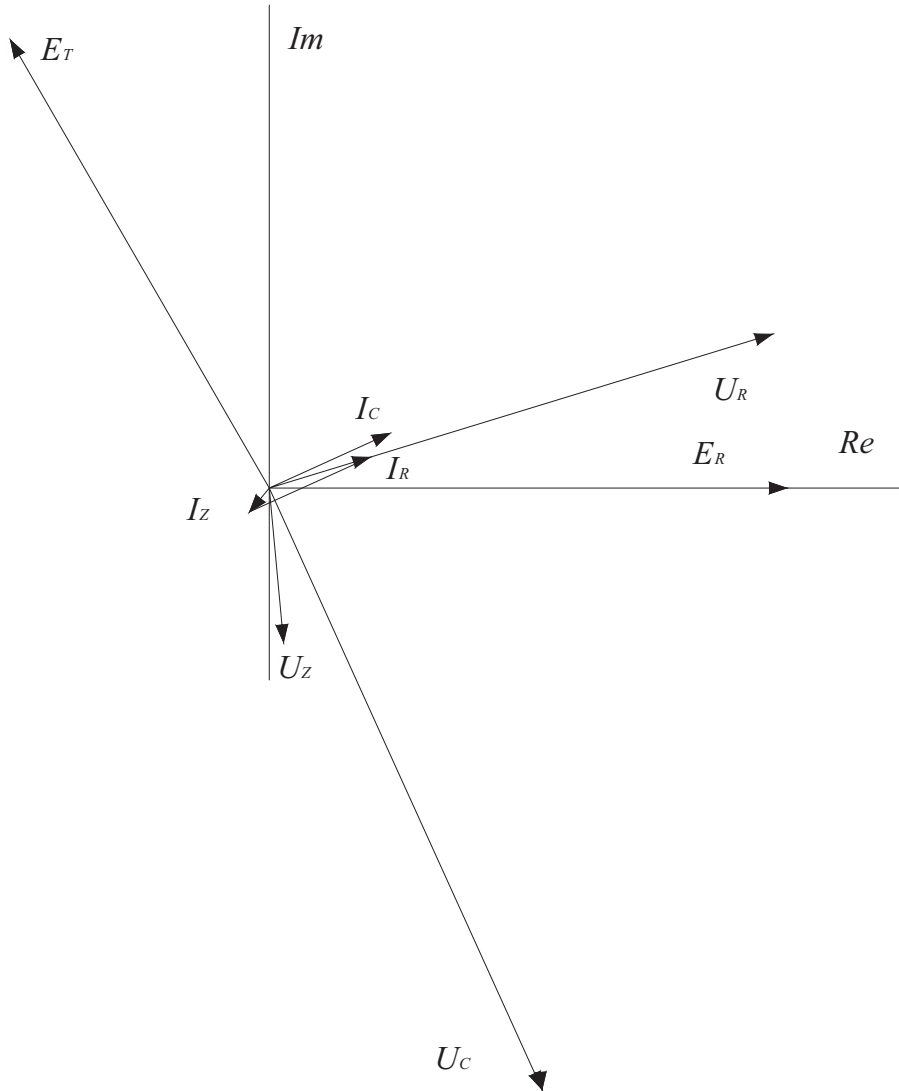
La resolución utilizando procedimientos de cálculo convencionales de estos sistemas no es difícil, pero resulta laboriosa comparada con la representación gráfica de las ecuaciones y, además, no permite una visualización clara de las magnitudes eléctricas. En esta representación, considerando sentidos positivos de tensiones de izquierda a derecha en R y C y hacia abajo en Z , lo más cómodo es escribir las ecuaciones de tensiones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{E}_R &= \vec{U}_R + \vec{U}_Z \\ \vec{E}_T + \vec{U}_R &= \vec{U}_Z \end{aligned}$$



Obtenidos los argumentos de las tensiones ($\varphi_{UR} = 17,01^\circ$, $\varphi_{UZ} = -84,74^\circ$, $\varphi_{UC} = -65,62^\circ$) es fácil obtener los de las intensidades porque en R están en fase, en C adelanta la corriente 90° y además se debe satisfacer la ecuación de corrientes del nudo: $\vec{I}_Z = \vec{I}_R - \vec{I}_C$.

Se obtiene un argumento $\varphi_{IZ} = -129,74^\circ$ por lo que el argumento de la impedancia es: $\varphi_Z = \varphi_{UZ} - \varphi_{IZ} = 45^\circ$.



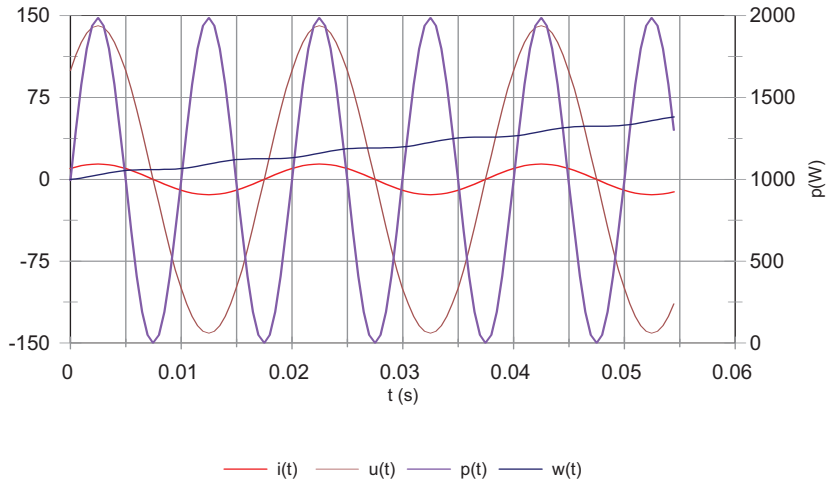
5.5.1 Determinar la expresión temporal de la potencia $p(t)$ y la energía, almacenada o convertida en otra forma de energía, $w(t)$ para los valores del problema 5.2.2

a) Las expresiones generales son:

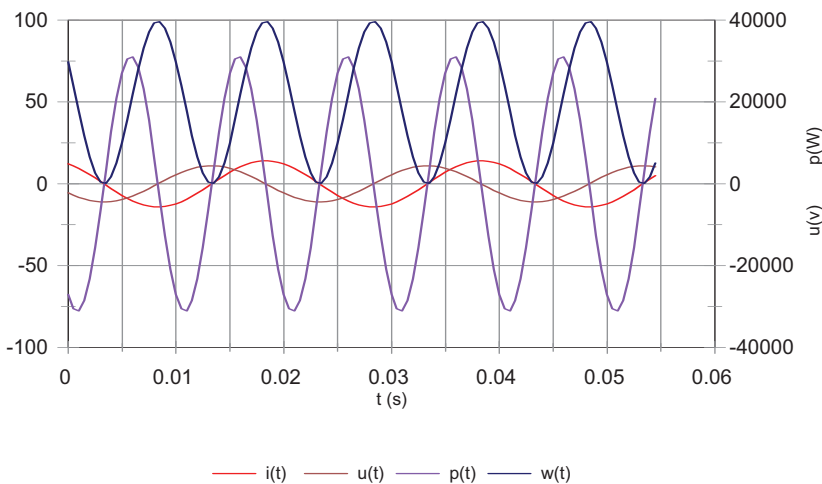
$$p(t) = U \cdot I [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)]$$

$$w(t) = U \cdot I \left[\frac{\sin(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}{2\omega} + \cos(\varphi_u - \varphi_i) \cdot t \right] + w(t=0)$$

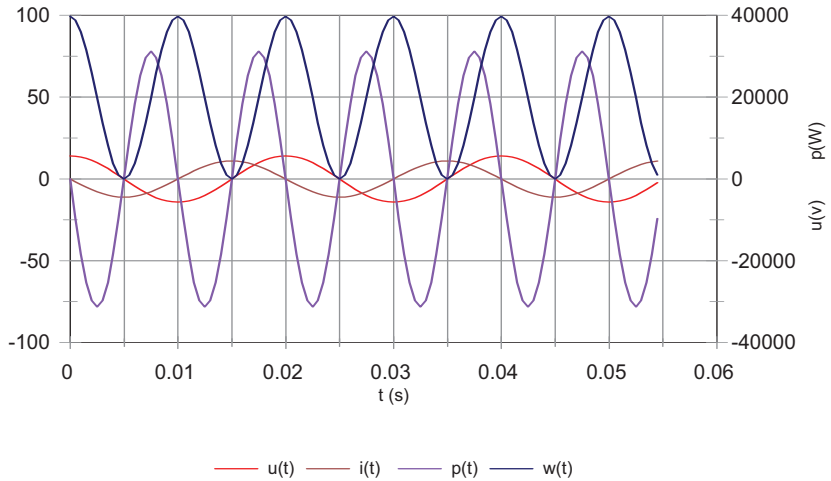
- b) Particularizando para la tensión y corriente en la resistencia considerada, y considerando que la energía en el instante inicial es nula para obtener $w(t=0)$:



- c) Particularizando para la tensión y corriente en la bobina considerada, y obteniendo $w(t=0)$ de la expresión general de energía almacenada en una bobina que es $\frac{1}{2}Li^2$:
- d) Particularizando para la tensión y corriente en el condensador considerado, y obteniendo $w(t=0)$ de la expresión general de energía almacenada en un



condensador que es $\frac{1}{2}Cu^2$:



5.6.4 Para el circuito del problema 5.3.1 determinar:

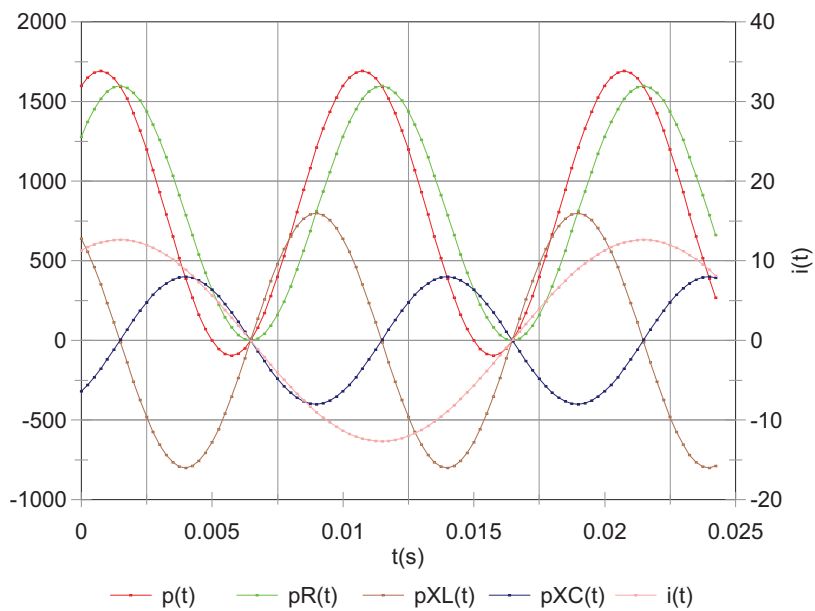
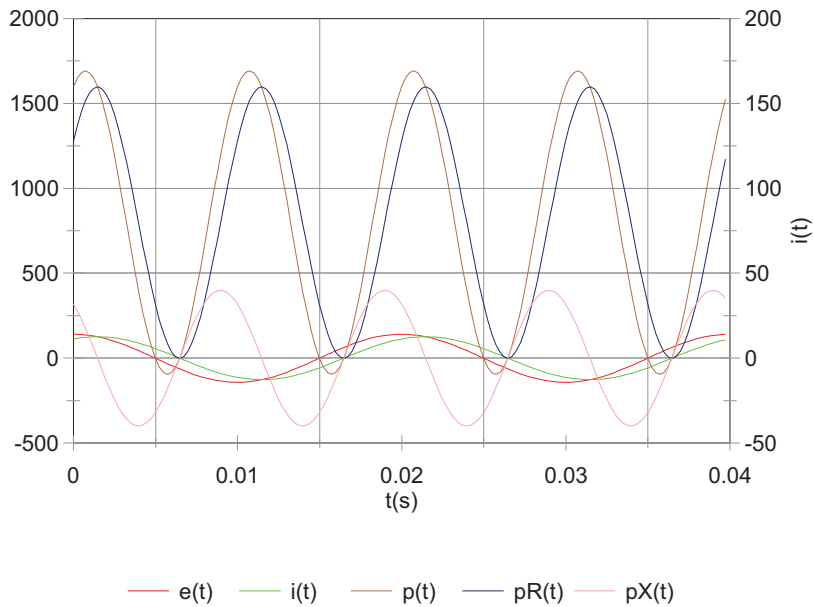
- $p(t)$, $p_X(t)$ y $p_R(t)$ de forma analítica. Representar gráficamente
- Determinar $P = \text{MED}[p(t)] = \text{MED}[p_R(t)]$
- Determinar $Q = \text{MAX}[p_X(t)]$
- Valor de $\vec{S}$. Dibujar el triángulo de potencias

Solución: a)

$$p(t) = U \cdot I \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + U \cdot I \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 894,43 \cdot \cos(200\pi t - 26,56^\circ) + 800$$

$$p_R(t) = U \cdot I \cos(\varphi_u - \varphi_i) [\cos(2\omega t + 2\varphi_i) + 1] = 800 \cdot [\cos(200\pi t - 53,16^\circ) + 1]$$

$$p_X(t) = U \cdot I \sin(\varphi_u - \varphi_i) \cdot \cos(2\omega t + 2\varphi_i + 90^\circ) = 400 \cdot \cos(200\pi t + 36,84^\circ)$$



Se observa como la potencia instantánea consumida por la bobina y el condensador tiene valor medio cero (porque bobina y condensador sólo pueden almacenar energía) y oscilan en oposición lo que hace que $p_X(t)$ sea realmente la resta de ambas. La potencia en la resistencia $p_R(t)$ también oscila, pero siempre con valores positivos porque las resistencias ($R>0$) sólo pueden consumir potencia.

Como es un circuito serie, tanto $p_R(t)$ como $p_{XL}(t)$ pasan por cero a la vez que $i(t)$, puesto que $p_R(t)$ también es Ri^2 y $p_{XL}(t)$ también es $\frac{1}{2} Li^2$. Esto implica que $p_{XC}(t)$ y $p_X(t)$ también pasan por cero en esos instantes.

b) $P = 800 \text{ W}$

c) $Q = 400 \text{ var}$

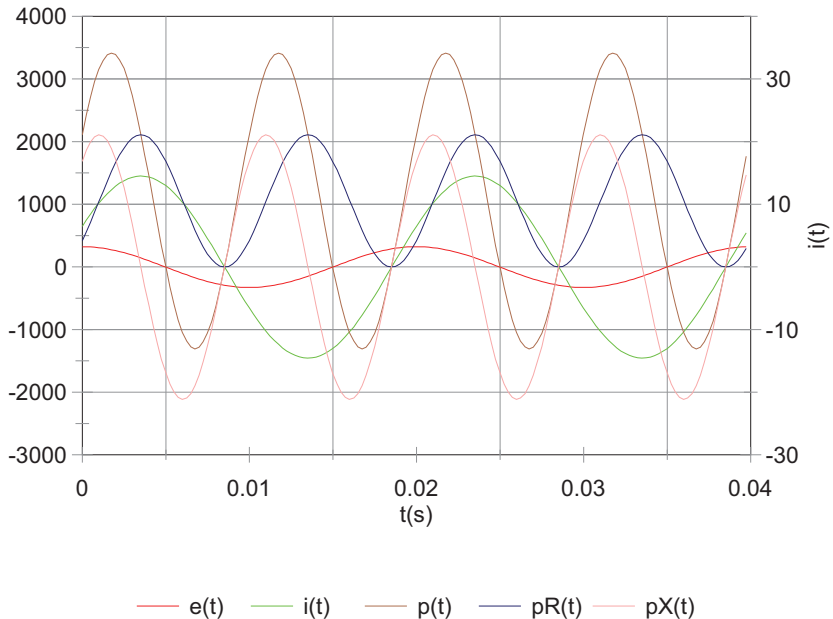
5.6.5 Realizar los mismos apartados del problema anterior para el circuito del problema 5.3.2.

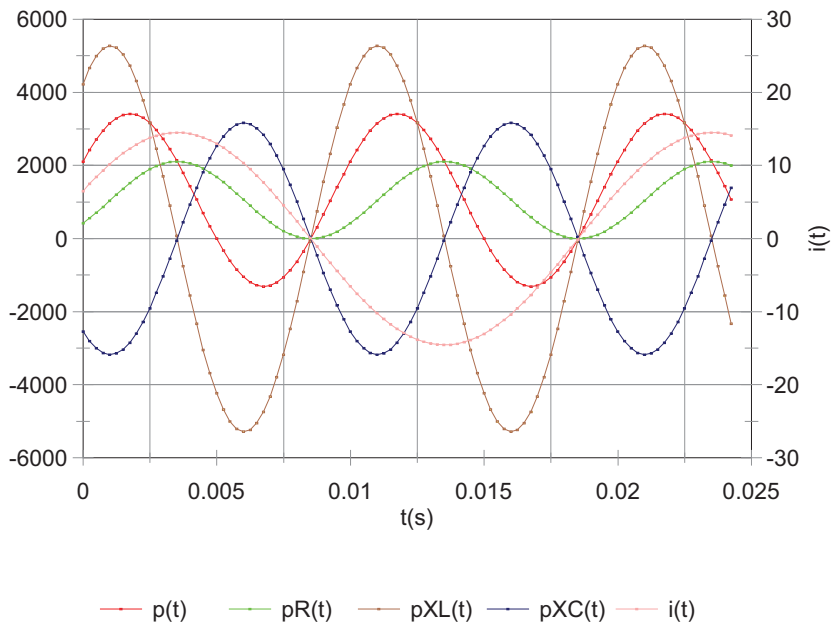
Solución: a)

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + U \cdot I \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 2361,85 \cdot \cos(200\pi t - 63,43^\circ) + 1056,43$$

$$p_R(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) \cdot [\cos(2\omega t + 2\varphi_i) + 1] = 1056,43 \cdot [\cos(200\pi t - 128,86^\circ) + 1]$$

$$p_X(t) = U \cdot I \cdot \sin(\varphi_u - \varphi_i) \cdot \cos(2\omega t + 2\varphi_i + 90^\circ) = 2112,41 \cdot \cos(200\pi t + 38,86^\circ)$$





Los comentarios del problema anterior son también aplicables a este problema.

b) $P = 1056,43 \text{ W}$

c) $Q = 2112,41 \text{ var}$

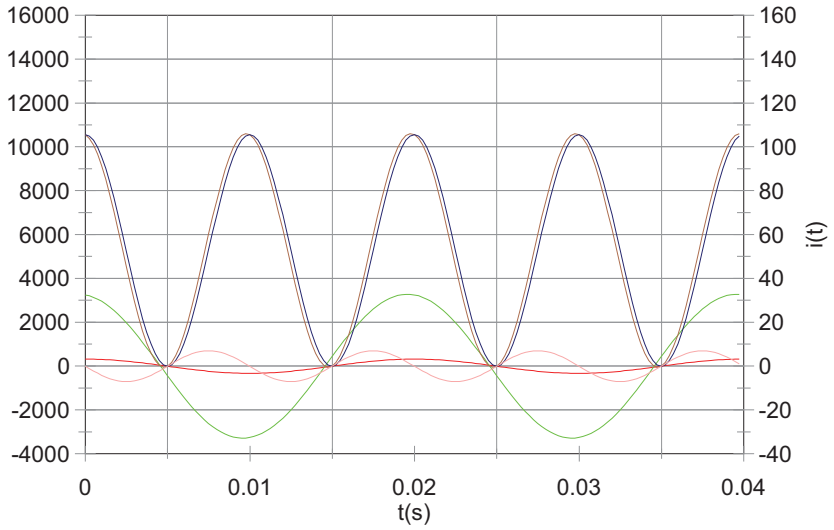
5.6.6 Realizar los mismos apartados del problema anterior para el circuito del problema 5.3.3.

Solución: a)

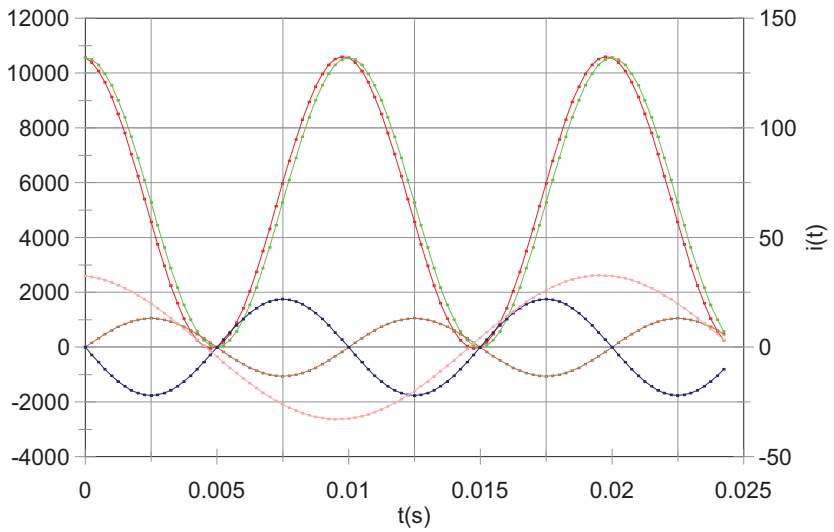
$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + U \cdot I \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 5327 \cdot \cos(200\pi t + 7,59^\circ) + 5281$$

$$p_G(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) \cdot [\cos(2\omega t + 2\varphi_u) + 1] = 5281 \cdot [\cos(200\pi t) + 1]$$

$$p_B(t) = U \cdot I \cdot \sin(\varphi_u - \varphi_i) \cdot \cos(2\omega t + 2\varphi_u - 90^\circ) = 704 \cdot \cos(200\pi t - 90^\circ)$$



— $e(t)$ — $i(t)$ — $p(t)$ — $pG(t)$ — $pB(t)$



— $p(t)$ — $pG(t)$ — $pBL(t)$ — $pBC(t)$ — $i(t)$

Los comentarios de los problemas previos son válidos con excepción de lo que se refiere al tipo de circuito.

En este caso es un circuito paralelo por lo que, a diferencia de lo que ocurre con los circuitos serie, $p_G(t)$ y $p_{BC}(t)$ pasan por cero a la vez que $u(t)=e(t)$, puesto que $p_G(t)$ también es $G u^2$ y $p_{BC}(t)$ también es $\frac{1}{2} C u^2$. Esto implica que $p_{BL}(t)$ y $p_B(t)$ también pasan por cero en esos instantes.

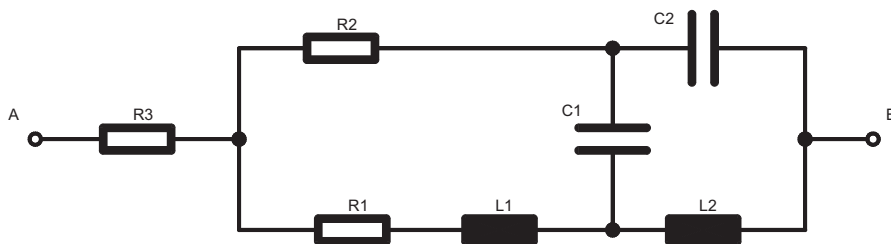
b) $P = 5281 \text{ W}$

c) $Q = 704 \text{ var}$

5.7.1 Para el dipolo de la figura, entre los bornes A y B en régimen estacionario sinusoidal:

- a) Obtener la impedancia equivalente $\vec{Z}_{AB}$ a 50 Hz
 b) ¿Depende $\vec{Z}_{AB}$ de la frecuencia?

$R_1 = 1 \Omega$	$L_1 = 1 \text{ mH}$
$R_2 = 1 \Omega$	$L_1 = 1 \text{ mH}$
$R_3 = 1 \Omega$	$C_1 = 500 \mu\text{F}$



Solución: a) $2.000 + 0.639i$ ohmios. Para obtenerla es cómodo resolver el circuito, por ejemplo por mallas, situando una fuente ideal entre A y B.

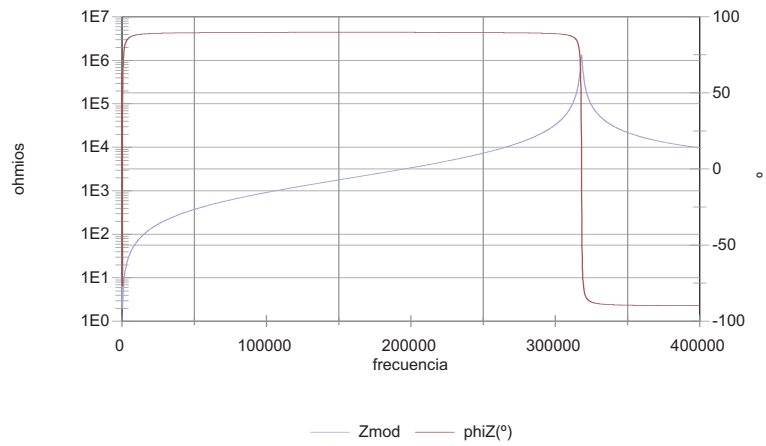
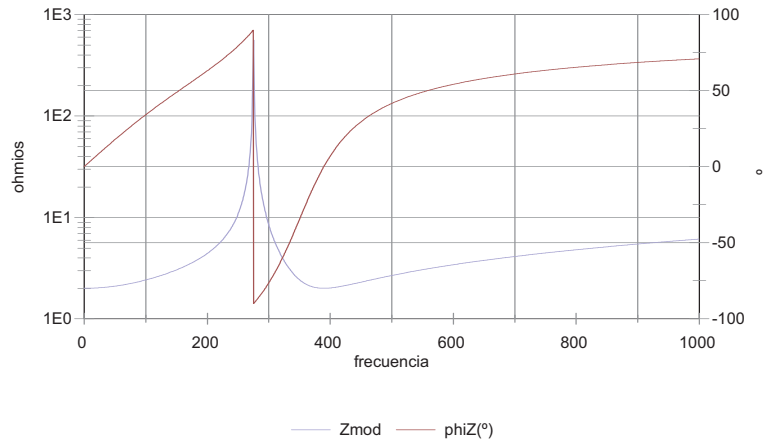
b) Salvo escasas ocasiones, siempre que un circuito contiene bobinas y condensadores la impedancia es función de la frecuencia. En este caso la dependencia es:

$$Z_{AB} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}, \text{ siendo:}$$

$$N(\omega) = (2 \cdot \omega^8 - 4 \cdot 10^6 \cdot \omega + 8 \cdot 10^{12} \cdot \omega^6 + 16 \cdot 10^{12} \cdot \omega^5 - 4,8 \cdot 10^{19} \cdot \omega^4 + 2 \cdot 10^{19} \cdot \omega^3 + 7,2 \cdot 10^{25} \cdot \omega^2 - 9,6 \cdot 10^{25} \cdot \omega + 3,2 \cdot 10^{25}) - j \cdot (2 \cdot 10^3 \omega^8 - 4 \cdot 10^9 \cdot \omega^7 - 1,4 \cdot 10^{10} \cdot \omega^6 + 3,6 \cdot 10^{16} \cdot \omega^5 - 6 \cdot 10^{15} \cdot \omega^4 - 7,1 \cdot 10^{22} \cdot \omega^3 + 11,4 \cdot 10^{22} \cdot \omega^2 - 4,4 \cdot 10^{22} \cdot \omega)$$

$$D(\omega) = \omega^8 - 4 \cdot 10^6 \cdot \omega^7 + 4 \cdot 10^{12} \cdot \omega^6 + 2,4 \cdot 10^{13} \cdot \omega^5 - 2,4 \cdot 10^{19} \cdot \omega^4 - 2 \cdot 10^{19} \cdot \omega^3 + 3,6 \cdot 10^{25} \cdot \omega^2 - 4,8 \cdot 10^{25} \cdot \omega + 1,6 \cdot 10^{25}$$

Gráficamente, el aspecto del módulo y ángulo de esta impedancia es:



Se aprecian dos frecuencias de resonancia: la primera entre 275 y 276 Hz que se ha ampliado para que se observe mejor, la segunda alrededor de 318,3 kHz

5.8.2 Verificar el cumplimiento del Teorema de Boucherot determinando y sumando las potencias activas y reactivas consumidas en los elementos pasivos y generadas en las fuentes:

- a) Del circuito 5.2.6
- b) Del circuito 5.2.7
- c) Del circuito 5.2.8

Solución: a) La fuente E_1 genera una potencia $601 \text{ W} + j 3517 \text{ var}$, la fuente E_2 genera una potencia $3644 \text{ W} + j 3015 \text{ VA r.}$ Las resistencias consumen una potencia activa $P_{R1} = 1263 \text{ W}$, $P_{R2} = 2312 \text{ W}$, $P_{R3} = 670 \text{ W}$ y las bobinas consumen una potencia reactiva $Q_{L1} = 2368 \text{ VA r.}$, $Q_{L2} = 4161 \text{ VA r.}$ La suma compleja de potencias generadas coincide con la suma de potencias consumidas (las diferencias menores que aparecen son debidas a la precisión de los cálculos).

b) La fuente E genera una potencia $1,468 \text{ MW} + j 886 \text{ kvar}$, la fuente I genera una potencia $702 \text{ kW} - j 2,424 \text{ kVA r.}$ Las resistencias consumen una potencia activa $P_{R1} = 346,4 \text{ kW}$, $P_{R2} = 1,157 \text{ MW}$, $P_{R3} = 667,2 \text{ kW}$, las bobinas consumen una potencia reactiva $Q_{L1} = 2,041 \text{ Mvar}$, $Q_{L2} = 2,180 \text{ Mvar}$, $Q_{L3} = 1,747 \text{ Mvar}$ y los condensadores consumen una potencia reactiva $Q_{C1} = -3,823 \text{ Mvar}$, $Q_{C2} = -3,682 \text{ Mvar}$.

c) La fuente E genera sólo potencia activa: $5,64 \text{ W}$, la fuente I_1 genera una potencia $6,83 \text{ W} - j 2,86 \text{ var}$ y la fuente I_2 genera una potencia $10,80 \text{ W} - j 6,83 \text{ var}$. La resistencia consume una potencia activa $P_R = 23,26 \text{ W}$, la bobina consumen una potencia reactiva $Q_L = 3,98 \text{ var}$ y el condensador consume una potencia reactiva $Q_C = -13,69 \text{ var}$ (o genera $+13,69 \text{ var}$).

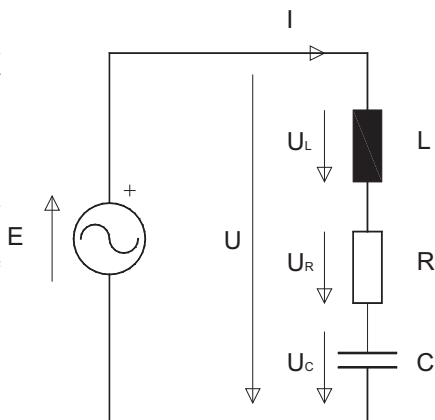
Obviamente se cumple el Teorema de Boucherot en todos los casos.

Ensayos:

5.1.- Comportamiento de los elementos pasivos RLC lineales

Se trata de verificar el grado de aproximación a la realidad de los resultados obtenidos por aplicación de las simplificaciones introducidas por la Teoría de Circuitos.

Utilizando una fuente de tensión alterna sinusoidal se alimentará un circuito formado por receptores que puedan considerarse ideales: resistivo puro (R), inductivo puro (L) y capacitivo puro (C) en serie, visualizando mediante un osciloscopio la tensión en cada uno de ellos¹. Se visualizarán por separado las tensiones en un circuito serie RL y en un circuito RC.



Para obtener las corrientes debe haberse medido previamente el valor de la resistencia (R).

Se visualizará, para cada uno de los elementos ideales, el valor temporal de la tensión y se determinará, a partir de la tensión en la resistencia, el valor temporal de la intensidad, midiendo valores máximos, período y desfase temporal entre tensión e intensidad. Se anotará también el valor medio y el valor eficaz de $u(t)$ que calcula el osciloscopio en cada caso.

A partir de estos datos se determinará la frecuencia y la expresión temporal y fasorial de las tensiones e intensidades para cada elemento, verificando la relación: *Valor máximo / Valor eficaz* = $\sqrt{2}$. A partir de las lecturas, el comportamiento de la bobina y del condensador ¿puede considerarse razonablemente ideal?

5.2.- Análisis fasorial de circuitos en serie

Se trata de verificar la 2ª Ley de Kirchhoff en el circuito del ensayo anterior, observando el desfase fasorial que caracteriza cada uno de los elementos básicos. Para

⁽¹⁾ Los osciloscopios miden normalmente tensiones. La visualización de la intensidad se puede realizar con ayuda de una resistencia: la tensión en bornes de una resistencia constante es siempre proporcional al valor de la resistencia. En este caso, la tensión en R , $u_R(t)$, dividido por el valor R nos indica el valor de la corriente en el circuito, $i(t)$.

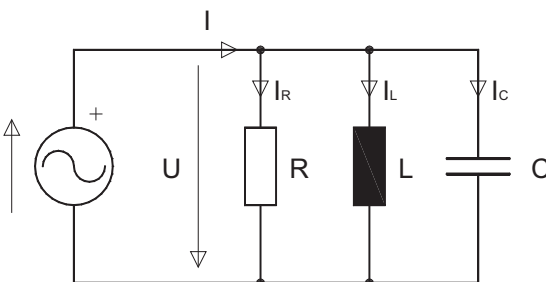
ello se medirán los valores eficaces de la tensión de red y de las tensiones e intensidades en todos los elementos.

Obtener gráfica y numéricamente el diagrama de tensiones e intensidades. Calcular la impedancia de cada elemento. Obtener el desfase entre la fuerza electromotriz y la intensidad en la fuente de tensión.

Calcular la potencia activa, reactiva y aparente consumida o generada por cada elemento del circuito. Verificar el cumplimiento del Teorema de Boucherot.

5.3.- Análisis fasorial de circuitos en paralelo

Se trata de verificar la 1ª Ley de Kirchhoff. Se conecta en paralelo un elemento resistivo puro, un condensador y un elemento inductivo, E alimentándose desde una fuente sinusoidal, midiéndose la tensión de red y las tensiones e intensidades en todos los elementos.



Obtener gráfica y numéricamente el diagrama de tensiones e intensidades. Calcular la impedancia de cada elemento (que debe coincidir aproximadamente con la obtenida en el ensayo 5.2). Obtener el desfase entre la tensión y la intensidad de red.

Calcular la potencia activa, reactiva y aparente consumida o generada por cada elemento del circuito. Verificar el cumplimiento del Teorema de Boucherot.

5.4.- Circuitos equivalentes

Se trata de obtener experimentalmente el equivalente de Thévenin y el equivalente de Norton entre dos bornes de un circuito en régimen estacionario sinusoidal.

Los ensayos a realizar son los habituales: ensayo en vacío para obtener $U(AB)_{\text{vacío}}$, ensayo en cortocircuito para obtener $I(AB)_{\text{cortocircuito}}$. Pero como en estos ensayos sólo se mide el valor eficaz de las magnitudes, se puede obtener únicamente el valor eficaz de E_{th} y el módulo de Z_{th} . Para obtener el argumento de Z_{th} (el argumento de E_{th} pueden fijarse como origen de ángulos) es necesario realizar, adicionalmente un ensayo en carga. Este ensayo en carga se realiza alimentando desde los bornes A y B a una carga de comportamiento conocido (por ejemplo un condensador) y midiendo $U(AB)_{\text{carga}}$ e $I(AB)_{\text{carga}}$.

6

SISTEMAS TRIFÁSICOS

Primera parte: Sistemas equilibrados

1.-Generación de un sistema trifásico: estrella, triángulo

Características. Nomenclatura

2.-Ventajas frente a los monofásicos

3.-Equivalentes estrella triángulo

4.-Análisis: Estudio de una fase

5.-Potencia

Segunda parte: Desequilibrios y armónicos

6.-Desequilibrio en la fuente y desequilibrio en la carga

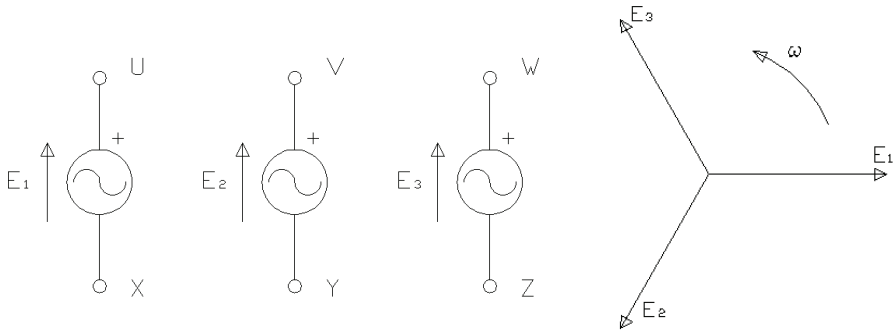
*7.-Resolución de circuitos desequilibrados mediante
procedimientos generales*

8.-Armónicos en sistemas trifásicos

9.-Limitaciones de los procedimientos generales

1.- Generación de un sistema trifásico: estrella, triángulo. Características. Nomenclatura.

Un sistema trifásico está formado simplemente por un conjunto de tres tensiones iguales cuyos fasores desfasan un tercio de ciclo ($\frac{2\pi}{3}$ radianes ó 120 °), es decir, denominando E_1 , E_2 y E_3 a las fuerzas electromotrices y tomando como origen de ángulos E_1 :



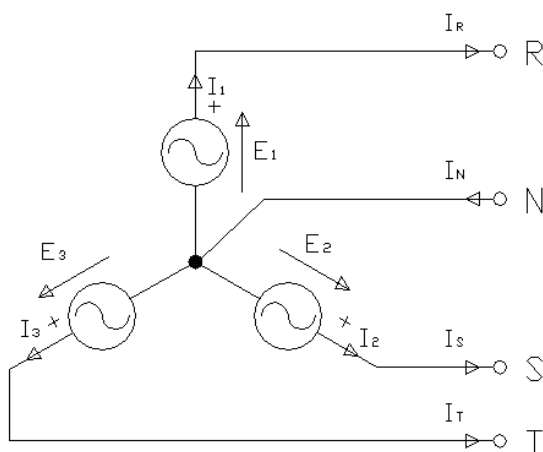
Este sistema puede obtenerse mediante tres generadores iguales girando sincronizadamente con el desfase apropiado. Sin embargo, en aplicaciones de potencia, resulta mucho más sencillo obtenerlo mediante un único generador que disponga de tres bobinas iguales pero situadas formando $\frac{2\pi}{3}$ radianes, en el interior de las cuales gira un campo magnético. Los generadores de potencia son siempre trifásicos.

En cualquier caso, para que el sistema pueda denominarse trifásico, es necesario que exista algún nudo común a las tres tensiones. Las dos posibilidades básicas son:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= E_{\text{máx}} \cos(\omega t) & \vec{E}_1 &= E e^{j\omega t} \\ e_2(t) &= E_{\text{máx}} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & \vec{E}_2 &= E e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \\ e_3(t) &= E_{\text{máx}} \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) & \vec{E}_3 &= E e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} \end{aligned}$$

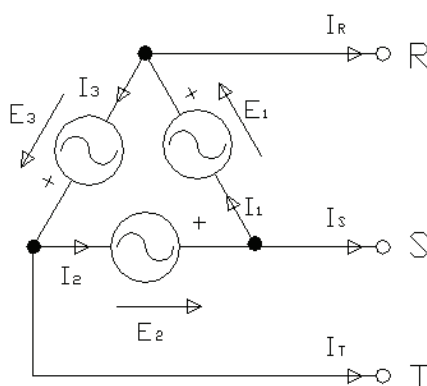
- *Conexión estrella:*

Conectando entre sí los bornes XYZ de las fuentes se obtiene un generador trifásico conectado en estrella. A los bornes UVW se les denomina fases, respectivamente, RST o ABC y al nudo XYZ se le denomina *neutro* N .

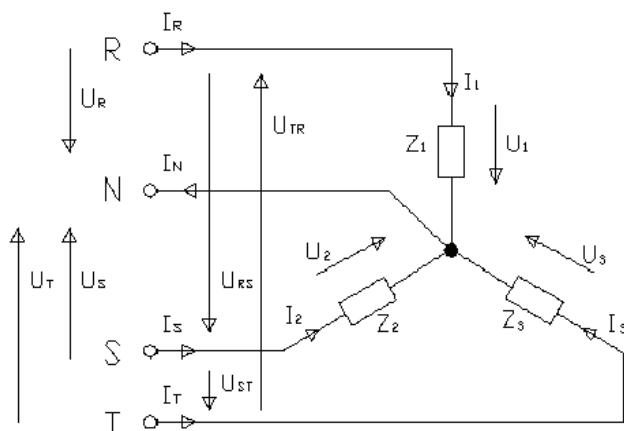


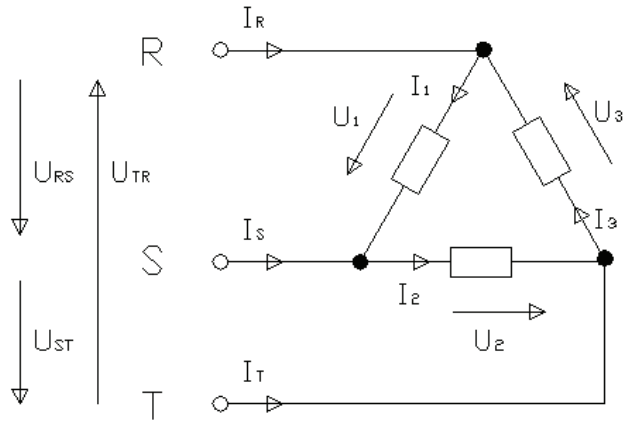
- *Conexión triángulo:*

Como la suma de las tres fuerzas electromotrices es cero, los generadores también pueden conectarse formando un lazo. A esta forma de conexión se denomina triángulo.



De igual forma, e independientemente de como se haya conectado el generador, los receptores pueden conectarse en estrella o en triángulo.





Nomenclatura:

- *Receptor trifásico y receptor monofásico:* Los sistemas eléctricos de potencia son siempre trifásicos, pero los receptores se denominan trifásicos si para su funcionamiento precisan, obligatoriamente, una alimentación trifásica (por ejemplo, los motores trifásicos) y se denominan monofásicos si son como los elementos pasivos que hemos manejado hasta ahora, esto es, sólo necesitan conectarse a una fuente alterna.
- *Sistema equilibrado:* Los sistemas trifásicos se denominan equilibrados cuando las tensiones en todas las fases y las corrientes en todas las fases son iguales y forman $\frac{2\pi}{3}$ radianes. Como, en condiciones normales, los generadores trifásicos entregan tensiones equilibradas (*generador equilibrado*), para que el sistema sea equilibrado es suficiente con que las impedancias en todas las fases sean iguales (*carga equilibrada*).
- *Línea:* Es el conjunto de tres conductores (RST o ABC) que unen cada carga o generador trifásico con el resto de la instalación. Se denomina *corriente de línea* al valor eficaz de la corriente que circula por estos conductores y *tensión de línea* al valor eficaz de la diferencia de potencial entre cualquier pareja de estos conductores.

- *Fase*: Tiene un doble significado, por una parte se denomina *fase R*, *fase S* o *fase T* a cada uno de los conductores del sistema trifásico, por otra parte se denomina *fase* a cada uno de los componentes monofásicos de los generadores o de las cargas trifásicas (en los gráficos los hemos denominado 1, 2 y 3).

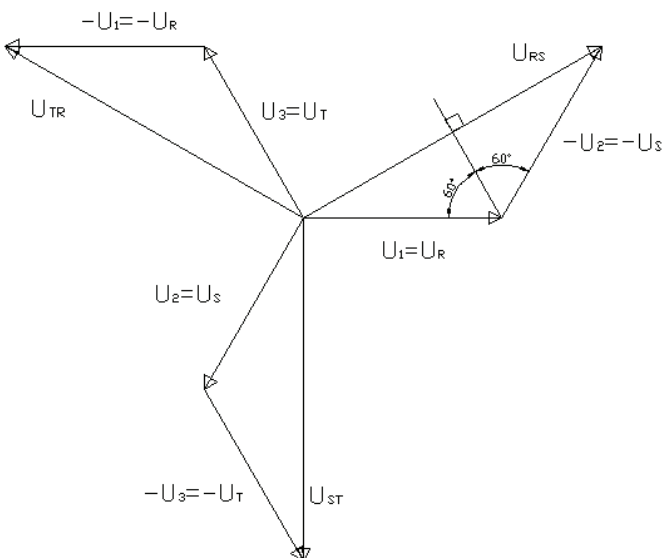
Con la primera acepción se indica, por ejemplo, la corriente en la *fase R* (para destacar aquello que es distinto de la *fase S* y de la *fase T*: el ángulo en sistemas equilibrados o todo en sistemas desequilibrados). Con la segunda acepción, se denomina *corriente de fase* al valor eficaz de la corriente que circula por los componentes monofásicos y *tensión de fase* al valor eficaz de la tensión de los componentes monofásicos.

Convenios de signos:

Completando los que hemos venido estableciendo, en los sistemas trifásicos se consideran las corrientes en las líneas dirigiéndose desde los generadores hacia las cargas por R, S y T y, si están en estrella, retornando por el conductor neutro.

Características de la conexión estrella equilibrada:

En la conexión estrella, cuando el sistema está equilibrado, las corrientes en las fases son iguales pero desfasadas $\frac{2\pi}{3}$ radianes. Así, la corriente que circula por el conductor neutro es cero.



$$\vec{I}_N = \vec{I}_R + \vec{I}_S + \vec{I}_T = 0$$

Esto implica que, incluso aunque la impedancia del conductor neutro sea muy grande, la diferencia de potencial entre el centro de estrella de la carga (*CE*) y el centro de estrella del generador (*N*) será siempre cero. La conclusión es que el sistema no cambia si se elimina por completo el conductor neutro¹. En lo sucesivo, en los sistemas trifásicos equilibrados, el conductor neutro lo representaremos a trazos para indicar que, exista físicamente o no, $U_{CE,N} = 0$.

Observando el gráfico de las cargas en estrella, y de forma análoga para los generadores, se obtiene²:

$$\begin{aligned} \vec{U}_{RS} &= \vec{U}_1 - \vec{U}_2 & \vec{I}_R &= \vec{I}_1 \\ \vec{U}_{ST} &= \vec{U}_2 - \vec{U}_3 & \vec{I}_S &= \vec{I}_2 \\ \vec{U}_{TR} &= \vec{U}_3 - \vec{U}_1 & \vec{I}_T &= \vec{I}_3 \end{aligned}$$

O, de forma más compacta, refiriendonos sólo a los valores eficaces:

$$\begin{aligned} U_{\text{línea}} &= \sqrt{3} U_{\text{fase}} \\ I_{\text{línea}} &= I_{\text{fase}} \end{aligned}$$

La primera expresión se obtiene rápidamente observando la representación gráfica de las ecuaciones de tensiones³. La segunda resulta evidente.

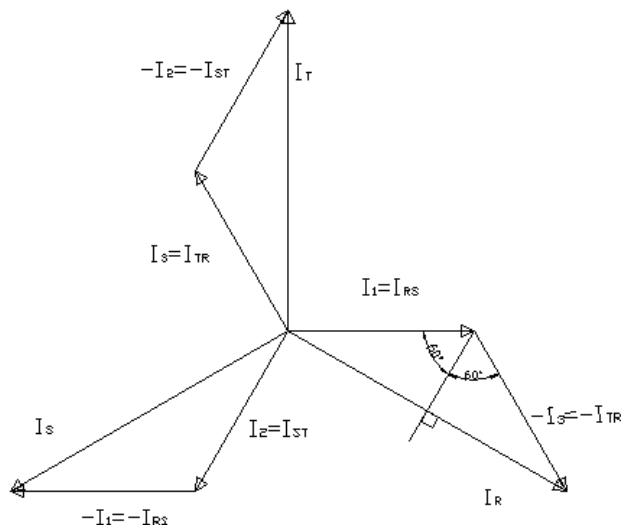
⁽¹⁾ En las redes de alta tensión y en los sistemas de baja tensión que alimentan a receptores trifásicos es habitual que no exista el conductor neutro, pero, en la alimentación a receptores monofásicos, incluso cuando el conjunto esté equilibrado, sí se incluye para permitir su funcionamiento en caso de que deje de estar equilibrado.

⁽²⁾ La simetría de los sistemas trifásicos permite, eligiendo un buen convenio de signos, que las ecuaciones presenten también un aspecto simétrico.

⁽³⁾ La tensión de línea es $2 \cdot U_{\text{fase}} \cdot \text{sen} 60^\circ = \sqrt{3} \cdot U_{\text{fase}}$

Características de la conexión triángulo equilibrado:

En la conexión triángulo, como no existe conductor neutro, incluso aunque el sistema esté desequilibrado la suma de corrientes de línea es cero:



$$\vec{I}_R + \vec{I}_S + \vec{I}_T = 0$$

Observando el gráfico de las cargas en triángulo, y de forma análoga para los generadores, se obtiene:

$$\vec{U}_{RS} = \vec{U}_1 \quad \vec{I}_R = \vec{I}_1 - \vec{I}_3$$

$$\vec{U}_{ST} = \vec{U}_2 \quad \vec{I}_S = \vec{I}_2 - \vec{I}_1$$

$$\vec{U}_{TR} = \vec{U}_3 \quad \vec{I}_T = \vec{I}_3 - \vec{I}_2$$

Refiriendonos sólo a los valores eficaces:

$$\begin{aligned} U_{\text{línea}} &= U_{\text{fase}} \\ I_{\text{línea}} &= \sqrt{3} I_{\text{fase}} \end{aligned}$$

La segunda expresión se obtiene de forma análoga a como se obtuvieron las tensiones en estrella. La primera resulta evidente.

2.- Ventajas frente a los monofásicos

- El volumen de conductor necesario para el transporte es menor porque se evita uno de los dos conductores de cada sistema monofásico. Si se compara, por ejemplo, una línea monofásica de tensión U con una línea trifásica con tensión de línea $U_{línea} = U$, para que las pérdidas de potencia en el transporte sean iguales ($P_{pIII} = P_{pI}$) el volumen de conductor requerido por la línea monofásica es $4/3$ del requerido por la línea trifásica¹.
- La potencia instantánea es constante: La potencia en un sistema monofásico presenta un cierto valor medio al que se suma una senoide del doble de frecuencia que la corriente o la tensión. En un sistema trifásico la potencia es la suma de las potencias de los tres sistemas monofásicos que los componen. En los sistemas equilibrados los valores medios en todas las fases son iguales y las componentes sinusoidales de las tres fases también, pero están desfasadas 120° por lo que su suma es cero. El resultado es que la

⁽¹⁾ En la línea monofásica existen dos conductores de resistencia $R = \rho \cdot \frac{\text{longitud}}{\text{sección}_I}$

recorridos por una corriente $I = \frac{S}{U}$:

$$P_{pI} = 2 \cdot RI^2 = 2 \cdot \rho \cdot \frac{\text{longitud}}{\text{sección}_I} \cdot \left(\frac{S}{U} \right)^2$$

En la línea trifásica existen tres conductores y cada fase es de una potencia $S/3$, si está en estrella la tensión de fase es $U_{fase} = U/\sqrt{3}$ así la corriente en cada conductor es $I = \frac{S/3}{U/\sqrt{3}}$. Se obtiene el mismo valor si se conecta en triángulo.

$$P_{pIII} = 3 \cdot RI^2 = 3 \cdot \rho \cdot \frac{\text{longitud}}{\text{sección}_{III}} \cdot \left(\frac{S}{\sqrt{3} \cdot U} \right)^2$$

Para que la potencia perdida sea la misma: $\text{sección}_I = 2 \cdot \text{sección}_{III}$ y teniendo en cuenta el número de conductores de cada tipo de línea se obtiene $\text{volumen}_I = \frac{4}{3} \text{volumen}_{III}$

potencia instantánea en un sistema trifásico es: $P_{\text{III}}(t) = 3 \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$, siendo $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ en cualquiera de las fases¹.

La consecuencia de esto es que las máquinas trifásicas (por ejemplo motores, que convierten energía eléctrica en mecánica, o generadores, que realizan la conversión opuesta) son notablemente más pequeñas que las monofásicas. En efecto, observando en el punto 5 del capítulo 5 la función $p(t)$ de un receptor monofásico, por ejemplo resistivo puro, se comprueba que oscila entre los valores $p(t) = 0$ y $p(t) = 2P$ (siendo P la potencia media o potencia activa), como las máquinas han de diseñarse, al menos mecánicamente, para que transmitan la potencia máxima que alcanzan, la potencia de diseño de las máquinas monofásicas es del orden del doble que la de las máquinas trifásicas.

Estas ventajas también las presentan otros sistemas con mayor número de fases (por ejemplo hexafásicos con seis fases iguales desfasadas 60° o dodecafásicos con doce fases iguales a 30°) pero el sistema más sencillo es el trifásico por esto es casi el único utilizado.

⁽¹⁾ Operando con la escritura exponencial de la potencia instantánea y tomando como origen de ángulos la corriente en la componente monofásica (1) la potencia instantánea en cada fase es:

$$\begin{aligned}
 p_1(t) &= \frac{1}{2} [U \cdot I \cdot e^{j(\varphi)} + U \cdot I \cdot e^{j(2\omega t + \varphi)} + U \cdot I \cdot e^{-j(\varphi)} + U \cdot I \cdot e^{-j(2\omega t + \varphi)}] \\
 p_2(t) &= \frac{1}{2} [U \cdot I \cdot e^{j(\varphi)} + U \cdot I \cdot e^{j(2\omega t - \frac{4\pi}{3} + \varphi)} + U \cdot I \cdot e^{-j(\varphi)} + U \cdot I \cdot e^{-j(2\omega t - \frac{4\pi}{3} + \varphi)}] \\
 p_3(t) &= \frac{1}{2} [U \cdot I \cdot e^{j(\varphi)} + U \cdot I \cdot e^{j(2\omega t + \frac{4\pi}{3} + \varphi)} + U \cdot I \cdot e^{-j(\varphi)} + U \cdot I \cdot e^{-j(2\omega t + \frac{4\pi}{3} + \varphi)}]
 \end{aligned}$$

Sumando, se obtiene el resultado indicado.

3.- Equivalentes estrella $\leftrightarrow$ triángulo

Impedancias equivalentes:

Para que las parejas de valores {tensión, corriente} sean las mismas en los bornes RST de tres impedancias de valor Z_Y conectadas en estrella y en los bornes de tres impedancias de valor Z_{Δ} conectadas en triángulo es necesario que la impedancia *en bornes* sea la misma en ambos casos.

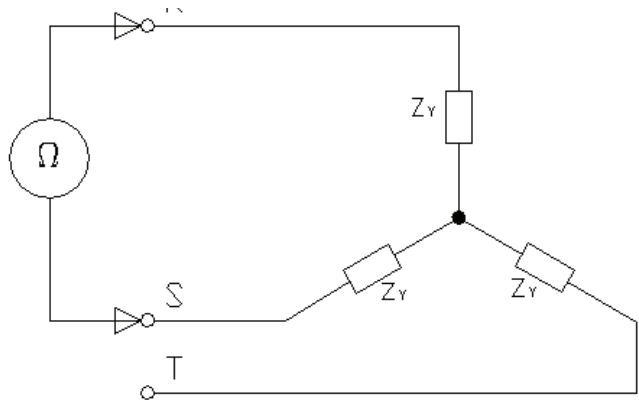
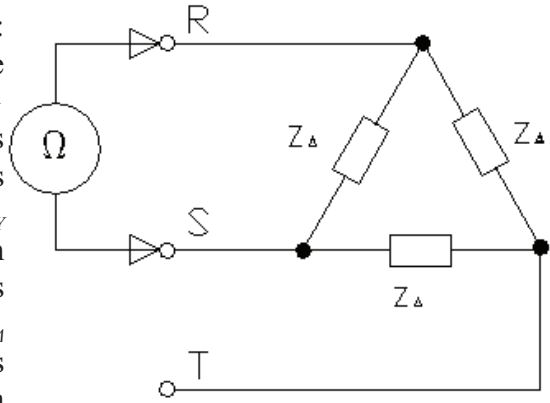
Comparando la impedancia que se observa en los bornes de ambos circuitos, debe cumplirse que:

$$2 \cdot Z_Y = \frac{1}{\frac{1}{Z_{\Delta}} + \frac{1}{2Z_{\Delta}}}$$

Simplificando esta expresión, se obtiene:

$$3\vec{Z}_Y = \vec{Z}_{\Delta}$$

Generadores ideales equivalentes: Si son de corriente, deben entregar la misma corriente en bornes, si son de tensión, la misma tensión en bornes. Aplicando esto, por ejemplo, a la equivalencia entre fuentes de tensión se observa que la tensión en bornes (tensión de línea) en estrella es:



$U_{línea} = \sqrt{3} \cdot E_Y$, mientras que en triángulo vale: $U_{línea} = E_{\Delta}$. Luego para que sean equivalentes debe cumplirse que:

$$\sqrt{3} \cdot E_Y = E_{\Delta}$$

Generadores reales equivalentes: Un generador real puede representarse mediante su equivalente de Thévenin en cada fase. Si se encuentra conectado en estrella, su equivalente en triángulo se halla simplemente aplicando las relaciones que hemos obtenido para las impedancias y para las fuentes ideales¹. Análogamente se obtiene el equivalente en estrella de un generador conectado en triángulo..

Debe observarse que los equivalentes en estrella de sistemas conectados en triángulo, se utilizan para facilitar el análisis de los circuitos. Cosa distinta es que, en realidad, los generadores y los receptores trifásicos pueden conectarse indistintamente en triángulo o en estrella. La forma finalmente elegida depende de la tensión de la red en la que deban funcionar porque el valor que debe mantenerse invariable es la tensión de fase (que es la tensión que se aplica a cada uno de los componentes monofásicos). Como en las placas de características de las máquinas trifásicas se indican las tensiones y corrientes de línea, es habitual que figuren dos valores para cada magnitud (por ejemplo, 230/400 V significa que la tensión de línea es 230 V en triángulo y 400 V en estrella, de esta forma la tensión de fase siempre es la misma: 230 V), el valor mayor de tensión de línea corresponde, obviamente, con la conexión estrella y el valor mayor de corriente de línea con la conexión triángulo.

⁽¹⁾ La demostración es muy rápida: se obtiene el equivalente de Norton de cada fase del generador en estrella, el resultado son tres fuentes de corriente y tres impedancias en estrella, ahora se obtiene el equivalente en triángulo de las fuentes de corrientes y de las impedancias, finalmente se obtiene el equivalente de Thévenin de cada fase y el resultado es un generador equivalente en triángulo. El proceso inverso permite obtener la estrella equivalente a un generador en triángulo.

4.- Análisis: Estudio de una fase

La simetría de las magnitudes en las tres fases de un sistema trifásico equilibrado (es decir: todos los valores de tensiones y corrientes son iguales pero desfasados 120°) permite conocer la solución a cualquier problema trifásico resolviendo únicamente una de las tres fases. Para que esto resulte sencillo es conveniente establecer una sistemática, por ejemplo:

- 1º.- Se parte del circuito original con generadores y cargas conectadas unas en estrella y otras en triángulo.
- 2º.- Se obtiene el equivalente en estrella de todos los generadores y de todas las cargas que existan en el circuito. Si se conocen las fuerzas electromotrices de los generadores en triángulo y las impedancias de las cargas en triángulo se aplican las relaciones que hemos obtenido anteriormente. Si se conocen las tensiones o corrientes de línea de los elementos que estén en triángulo se aplican las relaciones *línea* $\leftrightarrow$ *fase* de la conexión estrella. Si lo que se conoce es la potencia total de los elementos que estén en triángulo, la potencia de una fase, esté en estrella o en triángulo, es $\frac{1}{3}$ de la total.

Es conveniente destacar que sólo se obtiene el equivalente en estrella de los generadores y las cargas que se encuentren en triángulo. Las restantes cargas y generadores en estrella, así como todas las líneas que conectan unos elementos con otros permanecen invariables.

- 3º.- Se separa una de las fases del sistema equivalente en estrella y se analiza (por ejemplo la *fase R*). Fijémonos que, existiese o no conductor *neutro* en el circuito original, en el equivalente en estrella podemos considerarlo y es necesario para poder analizar una fase.
- 4º.- En ocasiones, por ejemplo porque se deban obtener las corrientes y tensiones de fase de elementos en triángulo, deberemos deshacer las equivalencias *estrella* $\leftrightarrow$ *triángulo* aplicando las relaciones *línea* $\leftrightarrow$ *fase* de la conexión triángulo.

5.- Potencia

Ya hemos indicado que una característica de la potencia total de un generador o de una carga trifásica equilibrada es que su valor instantáneo no es oscilante sinusoidalmente. Sin embargo, a efectos de análisis de los circuitos, los sistemas trifásicos son simplemente tres elementos monofásicos que consumen o generan la misma potencia aparente compleja, en consecuencia la aplicación del Teorema de Boucherot, independientemente de que esté conectado en estrella o en triángulo¹, es:

$$\begin{aligned} P &= 3 \cdot U_{fase} \cdot I_{fase} \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_{línea} \cdot I_{línea} \cdot \cos\varphi \\ Q &= 3 \cdot U_{fase} \cdot I_{fase} \cdot \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot U_{línea} \cdot I_{línea} \cdot \sin\varphi \\ \vec{S} &= 3 \cdot \vec{S}_{fase} = \sqrt{3} \cdot U_{línea} \cdot I_{línea} \angle \varphi \end{aligned}$$

Donde, como ya sabemos, $\varphi = \varphi_{U_{fase}} - \varphi_{I_{fase}}$ que, para receptores, coincide con φ_Z

La potencia que aparece en la placa es habitualmente la potencia total del generador o del receptor trifásico.

6.- Desequilibrio en la fuente y desequilibrio en la carga

Se denominan desequilibrados todos aquellos sistemas (generadores, cargas, ...) en los que alguna magnitud electromagnética (tensión, corriente, flujo magnético, ...) no es idéntica en las tres fases y desfasada 120° respecto de las otras dos fases.

En condiciones normales, las fuentes generan fuerzas electromotrices equilibradas y las cargas trifásicas también presentan las mismas impedancias en las tres fases por lo que consumen corrientes equilibradas, sólo en caso de avería se comportan de forma desequilibrada. Las cargas monofásicas, aunque deben repartirse por

⁽¹⁾ Recordando las características de ambas formas de conexión: $U_{línea} = \sqrt{3} U_{fase}$, $I_{línea} = I_{fase}$ en estrella y $U_{línea} = U_{fase}$, $I_{línea} = \sqrt{3} I_{fase}$ en triángulo.

igual entre las tres fases, son las responsables del desequilibrio de los sistemas trifásicos.

El objeto de este capítulo es, simplemente, mostrar cómo se aplican los procedimientos generales de resolución de circuitos a los sistemas trifásicos desequilibrados. Estos procedimientos requieren que las impedancias de los elementos sean invariables, es decir: que su valor no dependa de que el sistema esté equilibrado o desequilibrado. En los generadores y cargas trifásicas esto no es cierto, por lo que su resolución requerirá procedimientos más elaborados

Sin embargo, en condiciones normales de funcionamiento los sistemas desequilibrados están formados por generadores equilibrados en fuerzas electromotrices, con impedancias internas iguales, y por cargas monofásicas distintas en cada fase. A estos sistemas, mientras la potencia de las cargas sea pequeña comparada con la potencia de los generadores, pueden aplicarse sin apenas error los procedimientos de resolución que conocemos.

7.- Resolución de circuitos desequilibrados mediante procedimientos generales

Fuente equilibrada, carga desequilibrada

- *Carga en estrella con neutro:* Como la tensión en cada fase será conocida, las corrientes en cada fase se obtienen dividiendo la tensión por su impedancia respectiva. Como las impedancias de cada fase serán distintas, las corrientes estarán desequilibradas y la corriente por el neutro no será, en general, cero.
- *Carga en triángulo:* Si se conoce la tensión en bornes de la carga, la corriente en cada fase se obtiene dividiendo la tensión por la impedancia y las corrientes de línea aplicando la primera ley de Kirchhoff a cada nudo. Si lo que se conoce es la tensión en la fuente y existe una línea de cierta impedancia entre la fuente y la carga, lo más sencillo es resolver el circuito por mallas (tres si la fuente está en estrella).

- *Carga en estrella sin neutro:* Como la carga está desequilibrada, si su centro de estrella no se une con el neutro de un generador equilibrado, las tensiones de fase no estarán equilibradas. Sin embargo el generador suministra una tensión de línea equilibrada por lo que lo más sencillo es, nuevamente, resolver el circuito por mallas (dos si la fuente está en estrella).

Fuente y carga desequilibrada

- Cuando tanto la fuente como la carga está desequilibrada, si se cumplen las condiciones indicadas para poder aplicar los procedimientos generales, la solución más sencilla es resolver por mallas (Dos si tanto la fuente como la carga están en estrella, cuatro si ambos están en triángulo)

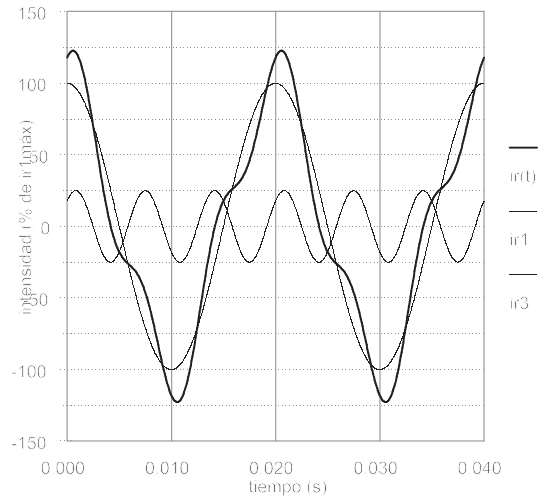
8.- Armónicos en sistemas trifásicos

La presencia de cargas no-lineales (esto es, cuya relación $u(i)$ no es lineal) o de generadores cuya fuerza electromotriz no es perfectamente sinusoidal provoca, tal como vimos en la última parte del capítulo 5, la aparición de tensiones y corrientes que, aunque son periódicas, no son sinusoidales. Si el sistema no-sinusoidal es trifásico aparecen efectos adicionales que interesa conocer.

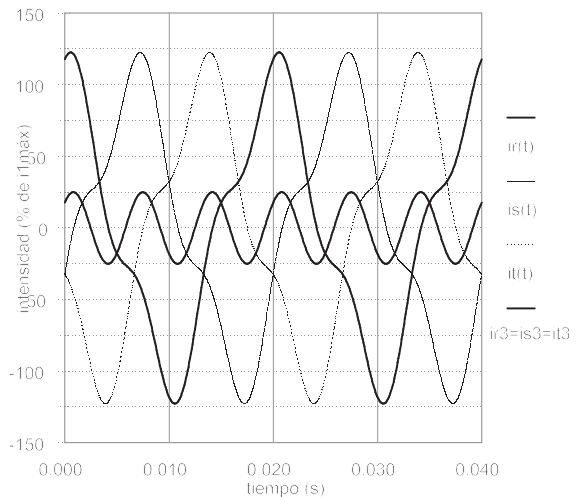
Un ejemplo típico lo constituyen las instalaciones de alumbrado con lámparas de descarga (hoy por hoy, todas menos las incandescentes). Estos receptores consumen una corriente no sinusoidal con un elevado contenido de tercer armónico. En estas instalaciones, aunque la suma de tres corrientes sinusoidales iguales desfasadas $\frac{1}{3}$ de ciclo es cero y esto se mantiene para la componente fundamental, los terceros armónicos se encuentran en fase y su suma es el triple de uno de ellos. El resultado es que, aunque la instalación se encuentre perfectamente equilibrada, por el neutro circulará una corriente suma de las corrientes armónicas.

Para resolver estos circuitos, tal como vimos, puede recurrirse a la resolución por superposición de los sistemas en régimen estacionario sinusoidal correspondientes a cada una de las frecuencias.

En cualquier caso, la existencia de corrientes armónicas implica, en general, la necesidad de sobredimensionar las instalaciones.



Corriente no-sinusoidal y sus componentes armónicas. La componente de 150 Hz tiene una amplitud 25% de la componente fundamental de 50 Hz.



Sistema trifásico equilibrado recorrido por las corrientes indicadas en la figura anterior. La corriente que circula por el neutro es la suma de las tres y está compuesta exclusivamente por tercer armónico.

9.- Limitaciones de los procedimientos generales

Los procedimientos de resolución de circuitos que hemos desarrollado presentan limitaciones para su aplicaciones a sistemas no-sinusoidales y a sistemas desequilibrados.

Respecto a los sistemas con armónicos de tensión o de corriente, la limitación fundamental aparece cuando no puede aplicarse el Teorema de Superposición porque, por ejemplo, el valor de la impedancia de los receptores es función de la corriente, lo cual es relativamente frecuente.

Respecto a los sistemas desequilibrados, la limitación más importante ocurre cuando las impedancias de las tres fases no son independientes entre si: Un elemento trifásico, por ejemplo un motor, puede representarse siempre mediante las impedancias que presenta entre cada dos fases y las impedancias que presenta entre cada fase y el punto de referencia de potenciales.

La solución de este circuito por nudos conduce a:

$$\begin{pmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_{11} & -\vec{Y}_{12} & -\vec{Y}_{13} \\ -\vec{Y}_{21} & \vec{Y}_{22} & -\vec{Y}_{23} \\ -\vec{Y}_{13} & -\vec{Y}_{23} & \vec{Y}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{pmatrix}$$

Cuando los elementos trifásicos funcionan normalmente están equilibrados, esto significa que la matriz de admitancias es simétrica y sólo existen dos valores: la admitancia propia Y_p en la diagonal principal y la admitancia mutua Y_M . Si además las tensiones están equilibradas (son iguales y forman 120°) el sistema de ecuaciones se simplifica a¹:

⁽¹⁾ porque $-\vec{Y}_M \cdot \vec{U}_2 - \vec{Y}_M \cdot \vec{U}_3 = \vec{Y}_M \cdot \vec{U}_1$ y así sucesivamente

$$\begin{pmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_P + \vec{Y}_M & 0 & 0 \\ 0 & \vec{Y}_P + \vec{Y}_M & 0 \\ 0 & 0 & \vec{Y}_P + \vec{Y}_M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{pmatrix}$$

Como las tres ecuaciones obtenidas no están ligadas, podemos asignar a cada fase una impedancia y estudiarla independientemente de lo que ocurra en las otras dos fases.

Sin embargo, cuando las impedancias o, lo que es más frecuente, las tensiones no están equilibradas, esta simplificación ya no es posible ($\vec{Y}_P \cdot \vec{U}_1 - \vec{Y}_M \cdot \vec{U}_2 - \vec{Y}_M \cdot \vec{U}_3 \neq (\vec{Y}_P + \vec{Y}_M) \cdot \vec{U}_1$) y no puede asignarse una impedancia invariable a cada fase.

Los procedimientos que se utilizan¹ se basan en transformar las tensiones y las corrientes a otro sistema de coordenadas para conseguir diagonalizar nuevamente la matriz de admitancias.

⁽¹⁾ Uno de los más utilizados es la Transformada de Fortescue-Stokvis

Ejemplos:

6.1.1. Tres impedancias $Z = 3 + j4 \, \Omega$ se conectan en estrella a una línea trifásica equilibrada con neutro accesible. La tensión $U_{RN} = 220 \, \text{V}$. Si se toma como origen de ángulos la tensión entre R y N, determinar:

- La tensión aplicada a cada fase. Las tensiones de línea.
- La corriente en cada una de las fases. La corriente en cada uno de los conductores de línea.
- La corriente que circula por el neutro.

Solución: a) Como la tensión de fase $\vec{U}_{RN} = 220 \angle 0^\circ \, \text{V}$, y el sistema está equilibrado, las tensiones en las otras dos fases son: $\vec{U}_{SN} = 220 \angle -120^\circ \, \text{V}$, $\vec{U}_{TN} = 220 \angle +120^\circ \, \text{V}$. Las tensiones de línea se obtienen aplicando la 2ª Ley de Kirchhoff:

$$\vec{U}_{RS} = \vec{U}_{RN} - \vec{U}_{SN} = 380 \angle +30^\circ \, \text{V}$$

$$\vec{U}_{ST} = \vec{U}_{SN} - \vec{U}_{TN} = 380 \angle +150^\circ \, \text{V}$$

$$\vec{U}_{TR} = \vec{U}_{TN} - \vec{U}_{RN} = 380 \angle -90^\circ \, \text{V}$$

Esto es, la tensión de línea es $\sqrt{3}$ la tensión de fase.

b) Las corrientes se obtienen dividiendo la tensión entre la impedancia en cada fase:

$$\vec{I}_R = \frac{\vec{U}_{RN}}{\vec{Z}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{3 + j4} = 44 \angle -53^\circ \, \text{A}, \quad \vec{I}_S = \frac{\vec{U}_{SN}}{\vec{Z}} = \frac{220 \angle -120^\circ}{3 + j4} = 44 \angle -173^\circ \, \text{A},$$

$$\vec{I}_T = \frac{\vec{U}_{TN}}{\vec{Z}} = \frac{220 \angle +120^\circ}{3 + j4} = 44 \angle 67^\circ \, \text{A}$$

esto es, tres corrientes iguales y desfasadas 120° : el sistema está también equilibrado en corrientes. Como es una conexión estrella la corriente que circula por los conductores de la línea es la misma que circula por cada fase.

c) La corriente que circula por el neutro es la suma $\vec{I}_N = \vec{I}_R + \vec{I}_S + \vec{I}_T$ que, como está equilibrado en corrientes, vale cero. La conexión del centro de estrella al neutro de la red no es imprescindible en sistema equilibrado en corrientes y, de hecho, no se realiza si la carga es internamente trifásica (por ejemplo un motor trifásico) pero si la carga está formada por receptores monofásicos susceptibles de funcionar por separado es conveniente unir el neutro al centro de estrella para permitir también el funcionamiento cuando alguno de los elementos monofásicos se desconecte y el sistema deje de estar equilibrado en corrientes.

6.1.2. Tres impedancias $Z = 3 + j4 \, \Omega$ se conectan en triángulo a una línea trifásica equilibrada. La tensión $U_{RS} = 220 \, \text{V}$. Si se toma como origen de ángulos la tensión entre R y S, determinar:

- La tensión aplicada a cada fase. Las tensiones de línea.
- La corriente en cada una de las fases. La corriente en cada uno de los conductores de línea.
- La corriente que circula por el neutro.

Solución: a) Como la tensión de fase $\vec{U}_{RS} = 220 \angle 0^\circ \, \text{V}$, y el sistema está equilibrado, las tensiones en las otras dos fases son: $\vec{U}_{ST} = 220 \angle -120^\circ \, \text{V}$, $\vec{U}_{TR} = 220 \angle +120^\circ \, \text{V}$. Como está en triángulo, las tensiones de línea son iguales a las de fase.

b) Las corrientes se obtienen dividiendo la tensión entre la impedancia en cada fase:

$$\vec{I}_{RS} = \frac{\vec{U}_{RS}}{\vec{Z}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{3 + j4} = 44 \angle -53^\circ \, \text{A} \quad \vec{I}_{ST} = \frac{\vec{U}_{ST}}{\vec{Z}} = \frac{220 \angle -120^\circ}{3 + j4} = 44 \angle -173^\circ \, \text{A},$$

$$\vec{I}_{TR} = \frac{\vec{U}_{TR}}{\vec{Z}} = \frac{220 \angle +120^\circ}{3 + j4} = 44 \angle 67^\circ \, \text{A}$$

esto es, tres corrientes iguales y desfasadas 120° . Las corrientes de línea se obtienen aplicando la 1ª Ley de Kirchhoff a cada nudo de la carga:

$$\vec{I}_R = \vec{I}_{RS} - \vec{I}_{TR} = 76,21 \angle -83^\circ \, \text{A}$$

$$\vec{I}_S = \vec{I}_{ST} - \vec{I}_{RS} = 76,21 \angle +157^\circ \, \text{A}$$

$$\vec{I}_T = \vec{I}_{TR} - \vec{I}_{ST} = 76,21 \angle +37^\circ \, \text{A}$$

Esto es, la corriente de línea es $\sqrt{3}$ la corriente de fase.

c) Las cargas trifásicas no tienen centro de estrella, no se conectan en ningún punto al conductor neutro. En esta forma de conexión la suma de corrientes de línea siempre es cero, incluso aunque no estén equilibradas.

6.2.1 Si el transporte de energía eléctrica del problema 5.1.2 {250 MW con $\text{fdp} = 1$ a 70 km, conductor de aluminio de $\rho_{Al} = 0,024 \, \Omega \, \text{mm}^2 / \text{m}$ y pérdidas del 5%} se realiza mediante una línea trifásica en funcionamiento equilibrado con una tensión entre fase y neutro de 220 kV en el centro de consumo (idéntica a la tensión de la línea monofásica del problema 5.12):

- Determinar la sección necesaria
- Comparar el volumen necesario en un transporte trifásico frente a uno monofásico

Solución: a) La corriente que recorre cada conductor de la línea trifásica es 378,8 A, un tercio de la corriente en la línea monofásica. Como la línea trifásica tiene tres conductores la sección necesaria es $57,9 \, \text{mm}^2$, un sexto de la necesaria en la línea monofásica.

b) El volumen de los tres conductores de la línea trifásica es un cuarto del volumen de los dos conductores de la línea monofásica.

6.3.1 La placa de características de una máquina trifásica indica 400/230 V, 10/17,3 A. Determinar:

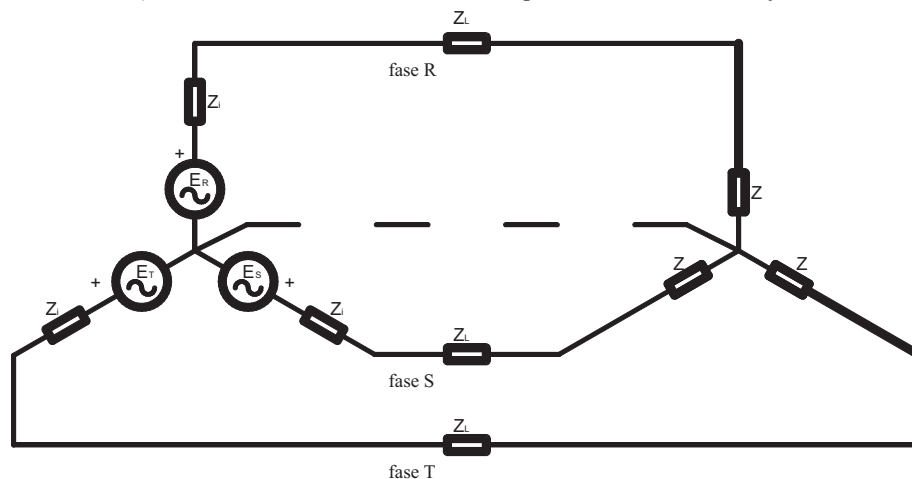
- Tensión de fase y corriente de fase de la máquina. Impedancia por fase
- Impedancia por fase del equivalente en estrella si la máquina se conecta en triángulo
- Impedancia por fase del equivalente en triángulo si la máquina se conecta en estrella

Solución: a) $U_{\text{fase}} = 230 \text{ V}$, $I_{\text{fase}} = 10 \text{ A}$, $Z_{\text{fase}} = 23 \Omega$
 b) Para la máquina en triángulo, $Z_{\text{eq } Y} = 7,67 \Omega$
 c) Para la máquina en estrella, $Z_{\text{eq } \Delta} = 69 \Omega$

6.4.1 Un generador trifásico conectado en estrella con tensión de fase en vacío 220 V e impedancia interna por fase $1+j \Omega$ se conecta a través de una línea de impedancia $1+j \Omega$ a un receptor trifásico en estrella de impedancia por fase $5+j3 \Omega$. Determinar:

- ¿Es necesario conectar el neutro del generador con el centro de estrella de la carga?
- Corriente de fase y corriente de línea
- Tensión de fase y tensión de línea en bornes del receptor.
- Tensión de fase y tensión de línea en bornes del generador

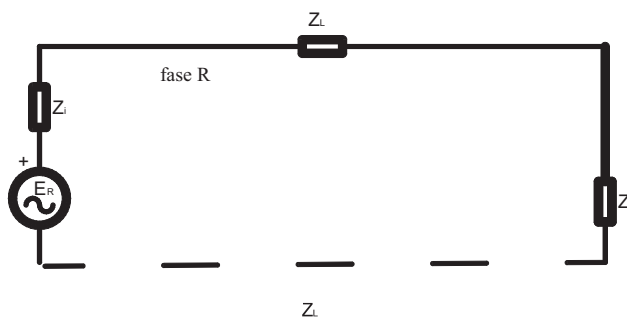
Solución: a) Cuando un sistema trifásico está equilibrado en tensiones y corrientes la



corriente que circula por el neutro es cero, es decir: el potencial del neutro del generador y del centro de estrella de la carga son el mismo, por lo que no es necesario conectar el neutro al centro de estrella de la carga. Sin embargo, si el receptor está formado por elementos monofásicos que puedan

funcionar por separado es necesario hacerlo para garantizar que se aplica a cada fase de la carga la tensión nominal incluso aunque se desconecten elementos monofásicos y la carga resulte desequilibrada.

b) Como es equilibrado resulta suficiente analizar una fase, por ejemplo la fase R. Como todos los elementos están en estrella no es necesario realizar



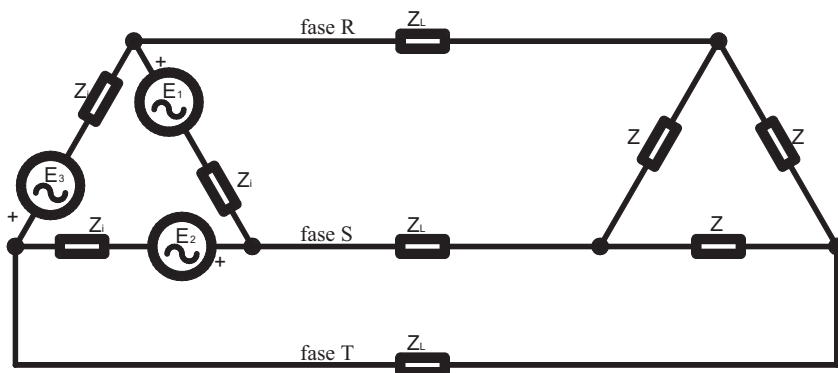
la obtención de equivalentes en estrella, además, la corriente de fase y la de línea son la misma y valen 25,6 A. Si se toma como origen de ángulos la fuerza electromotriz en la fase R ($E_R \angle 0$), entonces la corriente $I_R = 25,6 \angle -35,54^\circ$ A, desfasadas -120° y $+120^\circ$ se encuentran la corriente en S y en T

c) La tensión de fase en el receptor es la tensión entre fase y el centro de estrella. Vale 149,3 V (con un argumento $-4,58^\circ$ para la fase R). La tensión de línea es $\sqrt{3}$ veces mayor: 258,6 V (con un argumento $25,42^\circ$ para U_{RS})

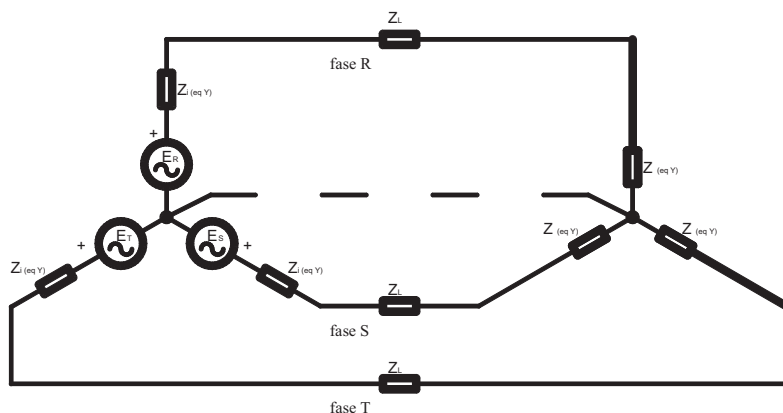
d) La tensión de fase en bornes del generador es también la tensión entre fase y neutro: 184,60 V (con argumento $-1,85^\circ$ para la fase R). La tensión de línea es 319,74 V (con argumento $28,15^\circ$ para U_{RS})

6.4.2 Un generador trifásico conectado en triángulo con tensión de línea en vacío 380 V e impedancia interna por fase $3+j3 \Omega$ se conecta a través de una línea de impedancia $1+j \Omega$ a un receptor trifásico en triángulo de impedancia por fase $15+j9 \Omega$. Determinar:

- Corriente de fase y corriente de línea
- Tensión de fase y tensión de línea en bornes del receptor.
- Tensión de fase y tensión de línea en bornes del generador

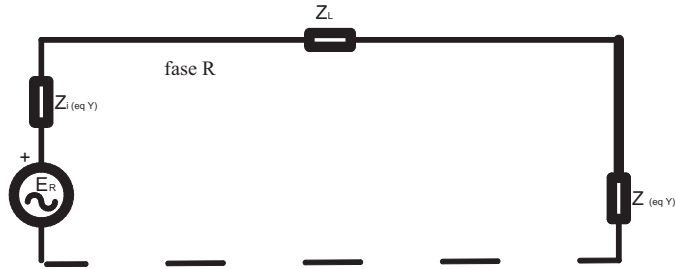


Solución: a) Como es equilibrado resulta suficiente analizar una fase, pero, como los elementos están en triángulo, es conveniente obtener previamente los equivalentes en estrella y analizar, a continuación, una fase de este circuito, por ejemplo la fase R. La fuerza electromotriz de cada fase del equivalente en estrella es la fuerza electromotriz en triángulo dividido por $\sqrt{3}$, esto es $E_{eqY} = 220 \text{ V}$. La impedancia interna por fase del generador equivalente en estrella es el valor en triángulo dividido por 3, esto es $Z_{i,eqY} = 1 + j \Omega$, la línea se mantiene tal cual y la impedancia de la carga equivalente en estrella es $Z_{eqY} = 5 + 3j \Omega$.



La corriente de fase del equivalente en estrella coincide con la corriente de línea del circuito real y vale 25,6 A. Si se toma como origen de ángulos la fuerza electromotriz en la fase R del equivalente en estrella ($E_R \angle 0$), entonces la corriente $I_R = 25,6 \angle -35,54^\circ \text{ A}$, desfasadas -120° y $+120^\circ$ se encuentran la

corriente en S y en T. Las corrientes de fase en la carga real en triángulo son $\sqrt{3}$ veces menores: 14,78 A (con un argumento $-5,54^\circ$ para I_{RS} , desfasadas -120° y $+120^\circ$ se encuentran las corrientes I_{ST} e I_{TR}). Las corrientes en la fuente real en triángulo son idénticas a las de la carga.



b) La tensión de fase en el receptor real en triángulo coincide con la tensión de línea, esto es, $\sqrt{3}$ veces mayor que la tensión entre fase y el centro de estrella del receptor equivalente en estrella. Vale 258,6 V (con un argumento $25,42^\circ$ para U_{RS})

c) La tensión de fase en bornes del generador real en triángulo también coincide con la tensión de línea, esto es, $\sqrt{3}$ veces mayor que la tensión entre fase y el centro de estrella del generador equivalente en estrella. Vale 319,74 V (con argumento $28,15^\circ$ para U_{RS})

6.4.3 Un generador trifásico en triángulo, con tensión en vacío 380 V e impedancia interna por fase $Z_i = 1 \angle 60^\circ \Omega$ alimenta, a través de una línea trifásica de impedancia $Z_L = 2 \angle 15^\circ \Omega$ por conductor, a un receptor formado por tres impedancias $Z_1 = 30 \angle 45^\circ \Omega$ en triángulo y a un receptor formado por tres impedancias $Z_2 = 10 \angle -45^\circ \Omega$ en estrella. Determinar:

- Circuito monofásico a analizar
- Corriente que circula por la línea
- Tensiones de fase y tensiones de línea en el origen y en el final de la línea
- Corrientes de fase y corrientes de línea en el generador y en las cargas

Solución: a) En primer lugar debe obtenerse el equivalente en estrella del generador y de la primera carga: $E_{eqY} = 220$ V, $Z_{i,eqY} = 1/3 \angle 60^\circ \Omega$, $Z_{1,eqY} = 10 \angle 45^\circ \Omega$. El circuito monofásico a estudiar está formado por la fuente (E_{eqY} en serie con $Z_{i,eqY}$), la línea Z_L y las dos cargas $Z_{1,eqY}$ y Z_2 en paralelo.
b) Por la línea circula una corriente de 23,9 A (con un argumento -5° en la fase R si se toma como origen de ángulos la fuerza electromotriz en la fase R del generador equivalente en estrella)

c) La tensión de fase del equivalente en estrella en el origen de la línea se obtiene mediante la segunda Ley de Kirchhoff: 215,5 V. La tensión de línea es $\sqrt{3}$ veces mayor: 373,2 V (con argumento $28,3^\circ$ para U_{RS}) y coincide con la tensión de fase del generador real en triángulo.

La tensión de fase del equivalente en estrella al final de la línea puede obtenerse también mediante la segunda Ley de Kirchhoff, pero es quizá más rápido obtener el equivalente de $Z_{l,eqY}$ y Z_2 en paralelo y multiplicar por la corriente que circula por la línea. En cualquier caso se obtiene: 170 V (argumento -5° para U_R). Esta tensión es la tensión de fase de la carga [2]. La tensión de línea es $\sqrt{3}$ veces mayor: 294,5 V, con un argumento $25,0^\circ$ para U_{RS} . La tensión de línea coincide con la tensión de fase en la carga [1].
d) Como el generador está en triángulo la corriente de fase es $\sqrt{3}$ veces menor que la corriente de línea, esto es, vale 13,8 A (con un argumento 25° para I_{RS})

La corriente de línea en la carga [1] coincide con la corriente de fase del equivalente en estrella de esta carga. Esta corriente se obtiene directamente a partir de la tensión al final de la línea, $I_{R1} = 17 \angle 50^\circ$ A, la corriente de fase real en triángulo es $\sqrt{3}$ veces menor: 9,8 A (argumento 80° para I_{RS})

La corriente de línea en la carga [2] coincide con la corriente de fase en estrella que se obtiene de forma análoga a la anterior: $I_{R2} = 17 \angle 40^\circ$ A

6.5.1 Determinar las potencias consumidas en las cargas, así como su factor de potencia, para los problemas siguientes:

- a) 6.1.1 b) 6.1.2
c) 6.4.1 d) 6.4.2

Solución: a) La potencia consumida en la carga es $S = 29 \angle 53,1^\circ$ kVA, esto es, una potencia activa $P = 17376$ W y una potencia reactiva $Q = 23168$ var. El $\text{fdp} = 0,6$

b) Se obtiene la misma potencia del apartado anterior

c) La potencia consumida en la carga es $S = 11,5 \angle 30,96^\circ$ kVA, esto es, una potencia activa $P = 9833$ W y una potencia reactiva $Q = 5899$ var. El $\text{fdp} = 0,86$

b) Se obtiene la misma potencia del apartado anterior

6.5.2 Una línea trifásica alimenta a 380 V a tres receptores trifásicos equilibrados de los que se conocen los datos que aparecen en la tabla adjunta. Determinar:

- a) Corrientes absorbidas por cada receptor
b) P, Q y S suministrada por la línea
c) Corriente en la línea

[1]	$S_{\text{con}} = 100$ kVA	$\text{fdp} = 0,8$ capacitivo
[2]	$P_{\text{con}} = 100$ kW	$\text{fdp} = 0,8$ inductivo
[3]	Tres impedancias en triángulo, $Z_3 = 3 + j3 \Omega$	

- d) Potencia de la batería de condensadores que debe disponerse para obtener un factor de potencia conjunto 1
- e) Valor de esta capacidad por fase necesaria si se conecta el banco de condensadores en estrella. Valor si se conecta en triángulo. ¿Cual forma de conexión es preferible?

Solución: a) Las corrientes de línea son: $I_1 = 151,9 \text{ A}$, $I_2 = 189,9 \text{ A}$, $I_3 = 155,1 \text{ A}$
 b) La potencia conjunta de los tres receptores es $S = 266,85 \angle 19,1^\circ \text{ kVA}$, esto es:

$$P = 252,2 \text{ kW y } Q = 87,2 \text{ kvar}$$

c) La corriente que circula por la línea es $I = 405,5 \text{ A}$

d) $Q_C = 87,2 \text{ kvar}$

e) La capacidad necesaria si se conecta en estrella es $1922,1 \mu\text{F}$. Si se conecta en triángulo sólo se necesita $640,7 \mu\text{F}$. La conexión preferible es, al menos en baja tensión, triángulo¹.

6.7.1. Tres impedancias $Z_R = 10 \angle 0^\circ \Omega$, $Z_S = 8,5 \angle 45^\circ \Omega$, $Z_T = 12 \angle -30^\circ \Omega$, se conectan en estrella a una línea trifásica equilibrada en tensiones cuya tensión de fase es 220 V . El neutro se conecta también al centro de estrella de la carga. Determinar:

- a) La corriente compleja en cada fase y en los conductores de la línea
- b) La tensión de fase y la tensión de línea
- c) La potencia compleja y el factor de potencia en cada fase
- d) La potencia compleja total

Solución: a) Como se conocen todas las tensiones y todas las impedancias, aplicando la ecuación de definición con los convenios de signos habituales y tomando como origen la tensión entre la fase R y el neutro: $I_R = 22 \angle 0^\circ \text{ A}$, $I_S = 25,9 \angle -165^\circ \text{ A}$, $I_T = 18,3 \angle 150^\circ \text{ A}$. Estas corrientes circulan por las fases y también por los conductores de la línea. La corriente en el neutro es la suma de éstas: $I_N = 19 \angle 172,6^\circ \text{ A}$

b) Las tres tensiones de fase en las cargas están equilibradas porque coinciden con las del generador, valen 220 V . Las tres tensiones de línea también están equilibradas y valen 380 V .

c) Como se conoce el fasor de tensión y de corriente en cada fase, la potencia compleja se obtiene fácilmente: $S_R = 4840 \angle 0^\circ \text{ VA}$, $S_S = 5698 \angle 45^\circ \text{ VA}$, $S_T = 4026 \angle -30^\circ \text{ VA}$, y los factores de potencia también: $\text{fdp}_R = 1$, $\text{fdp}_S = 0,71$, $\text{fdp}_T = 0,87$

d) La potencia compleja total es la suma de las potencias de fase: $S = 12519 \angle 9,3^\circ \text{ VA}$

⁽¹⁾ En alta tensión se utilizan conexiones en estrella para reducir la tensión aplicada a cada condensador

6.7.2. Tres impedancias $Z_{RS} = 10 \angle 0^\circ \Omega$, $Z_{ST} = 8,5 \angle 45^\circ \Omega$, $Z_{TR} = 12 \angle -30^\circ \Omega$, se conectan en triángulo a una línea trifásica equilibrada en tensiones cuya tensión de línea es 220 V. Resolver los mismos apartados del problema anterior.

Solución: a) Como se conocen todas las tensiones y todas las impedancias, aplicando la ecuación de definición y tomando como origen la tensión entre la fase R y la fase S: $I_{RS} = 22 \angle 0^\circ$ A, $I_{ST} = 25,9 \angle -165^\circ$ A, $I_{TR} = 18,3 \angle 150^\circ$ A. Las corrientes en cada conductor de la línea se obtiene aplicando la 1ª Ley de Kirchhoff a los nudos de la carga con el convenio de signos habitual: $I_R = 38,9 \angle -13,6^\circ$ A, $I_S = 47,5 \angle -171,9^\circ$ A, $I_T = 18,3 \angle 60^\circ$ A. Obviamente, en este caso no existe conductor neutro y la suma de éstas corrientes es cero.

b) Las tres tensiones de fase en las cargas están equilibradas porque las fija el generador, valen 220 V. Como está en triángulo coinciden con las de línea.

c) Como se conoce el fasor de tensión y de corriente en cada fase, la potencia compleja se obtiene fácilmente: $S_{RS} = 4840 \angle 0^\circ$ VA, $S_{ST} = 5698 \angle 45^\circ$ VA, $S_{TR} = 4026 \angle -30^\circ$ VA, y los factores de potencia también: $\text{fdp}_{RS} = 1$, $\text{fdp}_{ST} = 0,71$, $\text{fdp}_{TR} = 0,87$

d) La potencia compleja total es la suma de las potencias de fase: $S = 12519 \angle 9,3^\circ$ VA

6.7.3. Tres impedancias $Z_R = 4,54 \angle -30^\circ \Omega$, $Z_S = 3,22 \angle 45^\circ \Omega$, $Z_T = 3,86 \angle 15^\circ \Omega$, se conectan en estrella a una línea trifásica equilibrada en tensiones cuya tensión de línea es 220 V. El centro de estrella de la carga no se conecta al neutro. Resolver los mismos apartados del problema anterior.

Solución: a) En este caso no se conocen las tensiones en las impedancias, puede resolverse por mallas. Aplicando los convenios de signos habituales y tomando como origen U_{RS} se obtiene: $I_R = 38,9 \angle -13,6^\circ$ A, $I_S = 47,5 \angle -171,9^\circ$ A, $I_T = 18,3 \angle 60^\circ$ A. Estas corrientes circulan por las fases y también por los conductores de la línea. Como no se ha conectado el neutro, su suma es cero.

b) Las tres tensiones de línea están equilibradas y valen 220 V. Las tres tensiones de fase en las cargas se obtienen de la ecuación de definición de cada impedancia: $U_{R,CE} = 176,6 \angle -43,6^\circ$ V, $U_{S,CE} = 152,6 \angle -126,9^\circ$ V, $U_{T,CE} = 70,6 \angle -75^\circ$ V, que no están equilibradas.

c) Como se conoce el fasor de tensión y de corriente en cada fase, la potencia compleja se obtiene fácilmente: $S_R = 6869,7 \angle -30^\circ$ VA, $S_S = 7248,5 \angle 45^\circ$ VA, $S_T = 1292 \angle 15^\circ$ VA, y los factores de potencia también: $\text{fdp}_R = 0,87$, $\text{fdp}_S = 0,71$, $\text{fdp}_T = 0,97$

d) La potencia compleja total es la suma de las potencias de fase: $S = 12488 \angle 9,3^\circ$ VA

6.7.4. Resolver los mismos apartados del problema anterior si en el circuito del problema 6.7.1 se desconecta el neutro del centro de estrella de la carga.

- Solución: a) De forma similar al problema anterior, puede resolverse por mallas. Aplicando los convenios de signos habituales y tomando como origen la tensión entre la fase R y el neutro (U_{R0}) se obtiene una corriente en la malla que incluye los conductores R y S de valor $I_1 = 29,28 \angle 0,45^\circ$ A y para la otra malla $I_2 = 16,31 \angle -49,30^\circ$ A. Las corrientes que circulan por las fases y también por los conductores de la línea son: $I_R = 29,28 \angle 0,45^\circ$ A, $I_S = 22,49 \angle -145,96^\circ$ A, $I_T = 16,31 \angle 130,70^\circ$ A. Como no se ha conectado el neutro, su suma es cero.
- b) Las tres tensiones de línea están equilibradas y valen 380 V. Las tres tensiones de fase en las cargas se obtienen directamente de la ecuación de definición: $U_{R, CE} = 292,75 \angle 0,45^\circ$ V, $U_{S, CE} = 191,20 \angle -100,96^\circ$ V, $U_{T, CE} = 195,69 \angle -100,70^\circ$ V y no están equilibradas.
- c) Como se conoce el fasor de tensión y de corriente en cada fase, la potencia compleja se obtiene fácilmente: $S_R = 8571,7 \angle 0^\circ$ VA, $S_S = 4300 \angle 45^\circ$ VA, $S_T = 3191,7 \angle -30^\circ$ VA, y los factores de potencia también: $\text{fdp}_{RS} = 1$, $\text{fdp}_{ST} = 0,71$, $\text{fdp}_{TR} = 0,87$
- d) La potencia compleja total es la suma de las potencias de fase: $S = 14847 \angle 5,58^\circ$ VA

Problemas:

7.2.5. Un generador trifásico equilibrado en fuerzas electromotrices, se conecta en estrella. Su tensión en vacío es 220 V y sus impedancias internas por fase son: $Z_{i,R} = 1 \angle 45^\circ \Omega$, $Z_{i,S} = 1,5 \angle 30^\circ \Omega$, $Z_{i,T} = 0,5 \angle 60^\circ \Omega$. Está alimentando a un receptor trifásico en estrella de impedancia por fase $Z_R = 12 \angle 0^\circ \Omega$, $Z_S = 20 \angle -30^\circ \Omega$, $Z_T = 8 \angle 45^\circ \Omega$, que no se conecta al neutro. Determinar:

- La corriente compleja en todas las fases.
- Las tensiones de fase y de línea en el receptor
- La potencia compleja en cada fase

Solución: a) Resolviendo por mallas, con los convenios de signos habituales y tomando como origen la fuerza electromotriz de la fase R (E_R) se obtiene una corriente en la malla que incluye los conductores R y S de valor $I_1 = 12,8 \angle -38,5^\circ$ A y para la otra malla $I_2 = 25,6 \angle -72,4^\circ$ A. Las corrientes que circulan por las fases y también por los conductores de la línea son: $I_R = 12,8 \angle -38,5^\circ$ A, $I_S = 16,6 \angle -97,9^\circ$ A, $I_T = 25,6 \angle 107,6^\circ$ A. Como no se ha conectado el neutro, su suma es cero.

b) Las tres tensiones de fase en las cargas se obtienen directamente de la ecuación de definición: $U_{R,CE} = 153,6 \angle -38,5^\circ$ V, $U_{S,CE} = 332 \angle -127,9^\circ$ V, $U_{T,CE} = 204,8 \angle -152,6^\circ$ V. Las tensiones de línea en la carga tampoco están equilibradas, se obtienen fácilmente de las anteriores: $U_{RS} = 363,3 \angle 27,2^\circ$ V, $U_{ST} = 356,9 \angle -93,6^\circ$ V, $U_{TR} = 356,7 \angle 147,8^\circ$ V

c) La potencia compleja se obtiene fácilmente: $S_R = 1966 \angle 0^\circ$ VA, $S_S = 5511 \angle -30^\circ$ VA, $S_T = 5243 \angle 45^\circ$ VA.

7.2.6. Resolver el problema anterior si el generador trifásico que alimenta la carga se encuentra en triángulo, equilibrado en fuerzas electromotrices, tiene una tensión en vacío de 380 V y sus impedancias internas por fase son: $Z_{i,RS} = 5,4 \angle 24,5^\circ \Omega$, $Z_{i,ST} = 2,7 \angle 39,5^\circ \Omega$, $Z_{i,TR} = 1,8 \angle 54,5^\circ \Omega$.

Solución: a) Resolviendo nuevamente por mallas, con los convenios de signos habituales y tomando como referencia la fuerza electromotriz $E_{RS} = 380 \angle 30^\circ$ V, se obtiene una corriente en la malla que incluye los conductores R y S de valor $I_a = 12,8 \angle -38,5^\circ$ A, en la que incluye los conductores S y T $I_b = 25,6 \angle -72,4^\circ$ A y para la malla interna al generador $I_c = 14,1 \angle -57,08^\circ$ A. De aquí, las corrientes que circulan por los conductores de la línea son: $I_R = 12,8 \angle -38,5^\circ$ A, $I_S = 16,6 \angle -97,9^\circ$ A, $I_T = 25,6 \angle 107,6^\circ$ A.

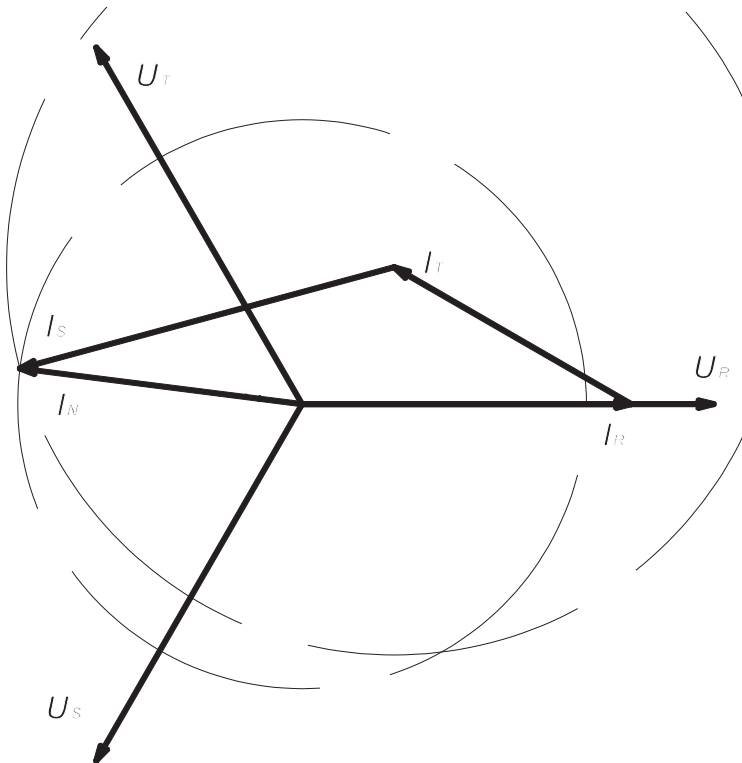
Como se han obtenido las mismas corrientes, los apartados b) y c) coinciden con el problema anterior.

7.2.7 En un receptor trifásico en estrella, con neutro, alimentado por una línea trifásica equilibrada en tensiones, se han medido las tensiones y las corrientes de fase: $U_R = U_S = U_T = 220$ V, $I_R = 22$ A, $I_S = 25,9$ A, $I_T = 18,3$ A, la corriente que circula por el neutro $I_N = 19$ A y la potencia consumida por la fase T, $P_T = 3486,6$ W. El receptor conectado en

la fase R es resistivo puro, el receptor conectado en la fase S es resistivo-inductivo y el receptor conectado en la fase T es resistivo-capacitivo. Dibujar el diagrama de tensiones y corrientes del circuito.

Solución: El diagrama de tensiones y corrientes es la representación gráfica de las ecuaciones del circuito, aunque, como una ecuación de tensiones es combinación lineal de las dos restantes, es suficiente representar dos de ellas. Como se conoce la potencia activa y la potencia aparente en la fase T, que es resistiva-capacitiva, el argumento $\varphi_T = -30^\circ$ puede obtenerse fácilmente. Este dato es conocido para que el sistema de ecuaciones esté determinado.

Como el sistema está equilibrado en tensiones de línea y en tensiones de fase, lo más cómodo es tomar como origen la tensión en la fase R. El argumento de la corriente I_R y de la corriente I_T son también conocidos. Las incógnitas son los argumentos de la corriente I_S y de la corriente I_N . Estos fasores se encuentran en el punto de corte de las circunferencias que definen sus módulos para satisfacer la ecuación de corrientes. De las dos soluciones que aparecen, la correcta es aquella que corresponde a una corriente I_S resistiva-inductiva.

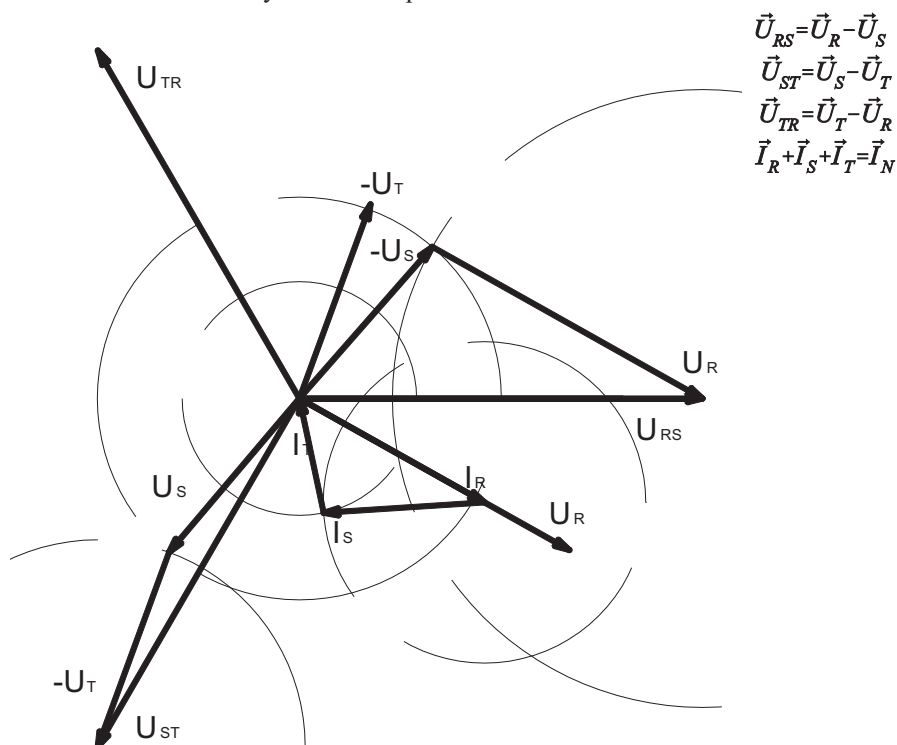


7.2.8 En un receptor trifásico en estrella, sin neutro, alimentado por una línea trifásica equilibrada en tensiones, se han medido las tensiones de línea: $U_{RS} = U_{ST} = U_{TR} = 380$ V, las tensiones de fase: $U_{R,CE} = 293$ V, $U_{S,CE} = 191$ V, $U_{T,CE} = 196$ V y las corrientes $I_R = 29$ A, $I_S = 22$ A, $I_T = 16$ A. El receptor conectado en la fase R es resistivo puro, el receptor conectado en la fase S es resistivo-inductivo y el receptor conectado en la fase T es resistivo-capacitivo. Dibujar el diagrama de tensiones y corrientes del circuito. Determinar la diferencia de potencial entre N y CE

Solución: El diagrama de tensiones y corrientes es la representación gráfica de las ecuaciones del circuito, aunque, como una ecuación de tensiones es combinación lineal de las dos restantes, es suficiente representar dos de ellas.

Como el sistema está equilibrado en tensiones de línea, lo más sencillo es comenzar dibujando estas tensiones, tomando por ejemplo U_{RS} como referencia. A partir de aquí, cada una de las ecuaciones de tensiones, por ejemplo la 1ª y la 2ª, define dos soluciones posibles. La solución común a ambas es la correcta.

A partir de aquí se conoce la posición de I_R y puede obtenerse la de las restantes corrientes. De nuevo aparecen dos soluciones, pero sólo una corresponde con una carga resistivo-inductiva en S y resistivo-capacitivo en T.

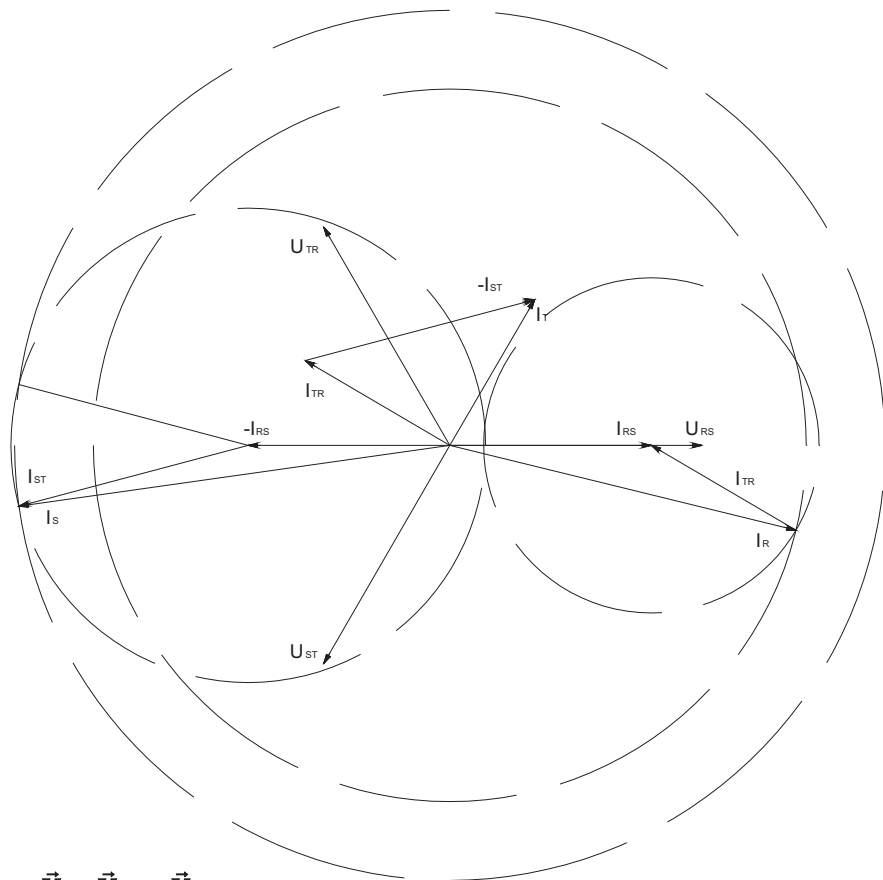


7.2.9 En un receptor trifásico en triángulo alimentado por una línea trifásica equilibrada en tensiones, se han medido las tensiones de línea: $U_{RS} = U_{ST} = U_{TR} = 220 \text{ V}$, las corrientes de línea $I_R = 38,9 \text{ A}$, $I_S = 47,5 \text{ A}$, $I_T = 18,3 \text{ A}$ y las corrientes de fase $I_{RS} = 22 \text{ A}$, $I_{ST} = 25,9 \text{ A}$, $I_{TR} = 18,3 \text{ A}$. El receptor conectado entre la fase R y S es resistivo puro, el receptor conectado entre la fase S y T es resistivo-inductivo y el receptor conectado entre la fase T y R es resistivo-capacitivo. Dibujar el diagrama de tensiones y corrientes del circuito.

Solución: El diagrama de tensiones y corrientes es la representación gráfica de las ecuaciones del circuito. Como está en triángulo las tensiones de cada fase coinciden con las tensiones de línea.

Se comienza trazando las tensiones, por ejemplo tomando U_{RS} como referencia. Como la posición de I_{RS} es conocida, puede determinarse la de I_{TR} y la de I_R , de las dos soluciones posibles la correcta es la que corresponde con I_{TR} resistiva-capacitiva. Análogamente se determina la posición de I_{ST} e I_S . Sin embargo, en esta última ecuación, ambas soluciones corresponden con I_{ST} resistiva-inductiva, si no se dispone de información adicional no se puede discriminar la solución correcta.

Una posibilidad, tal como se ha hecho en problemas anteriores, es medir la potencia activa del receptor que se encuentra conectado entre S y T, si de esta forma se obtiene que el factor de potencia es 0,707 la solución correcta será la que se ha señalado en el gráfico.



$$\begin{aligned}\vec{U}_{RS} &= \vec{U}_{R,CE} - \vec{U}_{S,CE} \\ \vec{U}_{ST} &= \vec{U}_{S,CE} - \vec{U}_{T,CE} \\ \vec{U}_{TR} &= \vec{U}_{T,CE} - \vec{U}_{R,CE} \\ \vec{I}_R + \vec{I}_S + \vec{I}_T &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{I}_R &= \vec{I}_{RS} - \vec{I}_{TR} \\ \vec{I}_S &= \vec{I}_{ST} - \vec{I}_{RS} \\ \vec{I}_T &= \vec{I}_{TR} - \vec{I}_{ST}\end{aligned}$$

Ensayos:

6.1.- Conexión en estrella y conexión en triángulo de cargas equilibradas

Como receptor se utilizarán pueden utilizar tres lámparas incandescentes iguales de tensión asignada conocida, conectandolas en estrella a la tensión de línea apropiada. Posteriormente se conectaran estos mismos receptores en triángulo eligiendo la nueva tensión de línea apropiada.

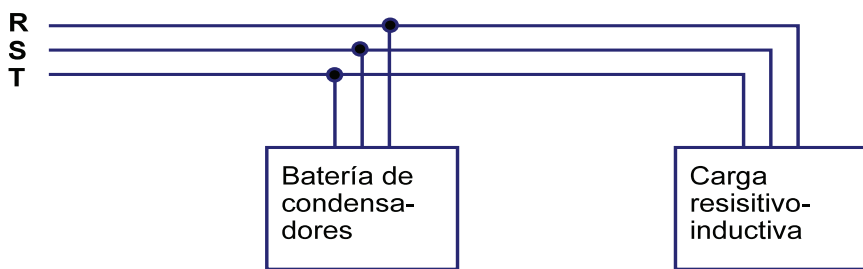
Se medirán todas las tensiones y corrientes de fase y de línea, verificando las relaciones entre ellas. Se verificará que los circuitos están equilibrados en corrientes ($I_R = I_S = I_T$, $I_N = 0$) y también en tensiones ($U_R = U_S = U_T$, $U_{RS} = U_{ST} = U_{TR}$). Se determinará, a partir de las medidas, la potencia absorbida por cada receptor y por el conjunto tanto en estrella como en triángulo.

¿Que ocurre si el receptor deja de estar equilibrado porque se desconecta (o se funde) una lámpara? ¿Tiene alguna utilidad el conductor neutro?

6.2.- Mejora del factor de potencia

Es importante que en las instalaciones su valor se encuentre próximo a la unidad. En este ensayo se realiza la mejora del factor de potencia de una instalación empleando el medio más habitual: la conexión de condensadores en paralelo con la instalación.

La instalación cuyo factor de potencia deseamos mejorar está formada, como es habitual, por un conjunto de receptores inductivo-resistivos conectados de forma apropiada a una red trifásica. Para mejorar el factor de potencia se utilizará una batería de condensadores conectada en triángulo.



Se anotará la capacidad por fase de la batería de condensadores. Se medirán las tensiones, intensidades, potencia activa y potencia reactiva que consume el receptor y la que entrega la fuente.

Se dibujará el triángulo de potencias de la potencia consumida por la carga y de la potencia suministrada por la fuente. Comparando estos valores ¿Cuál es la potencia de la batería de condensadores? ¿Coincide con su potencia nominal?

Se determinará el factor de potencia de la carga y de la fuente. ¿Qué reducción se ha logrado en la corriente que entrega la fuente? Calcular la potencia de la batería de condensadores para conseguir alimentar a esta carga con la menor corriente posible entregada por la fuente. Calcular la menor capacidad por fase necesaria indicando la forma de conexión de la batería de condensadores. Dibujar el diagrama de tensiones e intensidades de una fase del equivalente en estrella.

6.3.- Conexión en estrella de cargas desequilibradas

Se conectarán en estrella con neutro un condensador puro, una bobina y una resistencia. Es importante anotar la fase a la que se conectan cada uno de estos elementos porque el resultado es, obviamente, distinto.

Con el neutro conectado al centro de estrella de la carga, se medirán tensiones y corrientes de fase y de línea en el circuito, observando que no es equilibrado en corrientes pero sí en tensiones. A continuación se desconectará el centro de estrella del neutro de la red y se volverán a medir estas magnitudes, comprobando que ahora no es equilibrado en corrientes ni en tensiones de fase en la carga, pero continúa siendo equilibrado en tensiones de línea.

A partir de las lecturas obtenidas se realizará el diagrama de tensiones y corrientes del circuito en ambas situaciones. Se determinará la impedancia compleja conectada a cada una de las fases y la potencia compleja, activa y reactiva consumida por cada fase en ambos casos.

¿Qué ocurriría en una instalación desequilibrada si falla el neutro? ¿Es conveniente proteger el neutro de una instalación trifásica con cualquier elemento de corte, por ejemplo, fusibles?

6.4.- Conexión en triángulo de cargas desequilibradas

Se conectarán en triángulo un condensador puro, una bobina y una resistencia pura. Es importante anotar entre qué fases se conectan cada uno de estos elementos. Se medirán las tensiones y corrientes de fase y de línea en el circuito, observando que no es equilibrado en corrientes pero sí en tensiones.

Se realizarán el mismo desarrollo que en el ensayo previo: Comparando ambos ensayos ¿Qué forma de conexión parece más apropiada cuando existen desequilibrios importantes?

6.5.- Cargas trifásicas no-lineales

Se dispondrá un circuito receptor en estrella formado por tres lámparas de descarga y se medirán las intensidades en las tres fases y en el neutro. La corriente consumida por estos receptores está compuesta mayoritariamente por la componente fundamental y un tercer armónico (frecuencia triple de la fundamental, esto es, 150 Hz).

¿Está equilibrado el circuito?

Como la corriente del neutro será $I_N=3 \cdot I_3$ y la corriente de las fases $I^2= I_1^2+I_3^2$, se determinará el valor del tercer armónico I_3 y del armónico fundamental I_1 . Calcular la distorsión armónica.

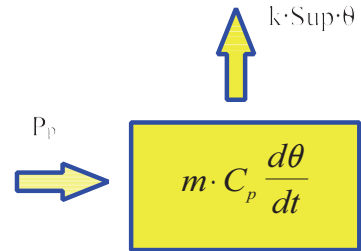
ANEXOS

3A.- Procesos físicos que conducen a ecuaciones análogas
Anexo 3B.- Resumen de procedimientos de cálculo

Anexo 3A.- Procesos físicos que conducen a ecuaciones análogas

3A.1.- Procesos térmicos

Cuando se aporta una potencia calorífica P_p a un sistema de masa m (kg) y calor específico C_p (j/kg °C) se inicia un proceso de calentamiento en el que el sistema almacena energía calorífica (aumentando progresivamente su temperatura) y transmite calor al ambiente que le envuelve.



La transmisión de calor por convección y por conducción es proporcional a la superficie de contacto con el entorno (m^2) y a la diferencia de temperatura entre el interior del sistema y el entorno (θ °C).

En consecuencia, la ecuación de calentamiento es:

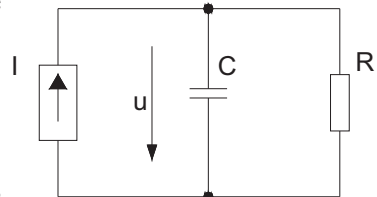
$$P_p = m \cdot C_p \cdot \frac{d\theta}{dt} + k \cdot Sup \cdot \theta$$

Comparando esta ecuación con la que se obtiene para un circuito eléctrico:

$$I = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$$

Cuya solución, como ya sabemos, es siempre una exponencial creciente:

$$u(t) = R \cdot I (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Con constante de tiempo $\tau = R \cdot C$. En transitorios térmicos es frecuente considerar que su duración es del orden de 3τ , que corresponde con un error respecto del incremento de temperatura inicial-final del 5%

Se observa que son análogas, siendo:

Magnitud Térmica		Eléctrica
Calor aportado (W)	P_p	I
Capacidad térmica (J/°C)	$m C_p$	C
Calentamiento (°C)	θ	u
Resistencia térmica (°C/W)	$1/k \text{ Sup}$	R

Así, la solución de la ecuación de calentamiento es:

$$\theta(t) = \frac{P_p}{k \cdot \text{Sup}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \theta_{\text{final}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Con $\tau = \frac{m \cdot C_p}{k \cdot \text{Sup}}$ y $\theta_{\text{final}} = \frac{P_p}{k \cdot \text{Sup}}$

Y de forma análoga a la descarga del circuito RC se obtiene la ecuación de enfriamiento que es una exponencial decreciente:

$$\theta(t) = \theta_{\text{inicial}} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

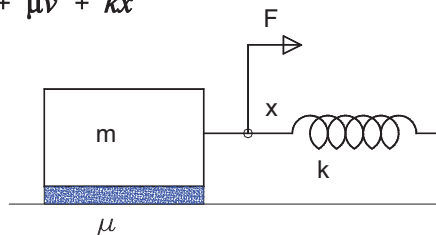
3A.2.- Procesos mecánicos

Considerando un sistema mecánico como el de la figura, en el que existe energía cinética, rozamiento y energía potencial elástica, podemos escribir:

$$F = ma + \mu v + kx$$

Siendo:

- m: masa
- a: aceleración



- μ : coeficiente de rozamiento
- v : velocidad
- k : coeficiente de elasticidad
- x : desplazamiento

En función de la velocidad, la ecuación de fuerzas puede expresarse:

$$F = m \frac{dv}{dt} + \mu v + \left(k \int_0^t v dt + F_0 \right)$$

Que es análoga a la ecuación de un circuito serie RLC alimentado por una fuente.

$$E = L \frac{di}{dt} + Ri + \left(\frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_0 \right)$$

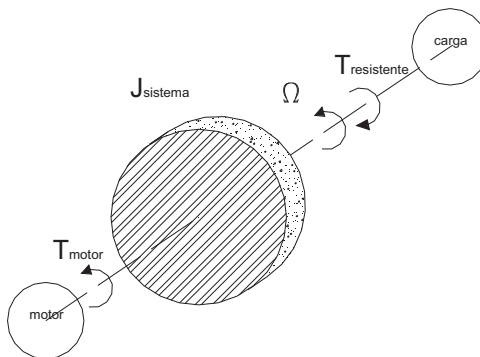
La solución de esta ecuación diferencial de segundo grado puede ser exponencial u oscilante, dependiendo de los valores de los coeficientes. En general, todos los sistemas mecánicos responden a este tipo de ecuaciones, pero en algunos, como los sistemas hidráulicos, con la dificultad añadida de que los coeficientes no son constantes y la solución debe obtenerse por métodos numéricos.

En algunos casos no existe energía elástica. Entonces la ecuación diferencial resulta de primer grado y la solución es exponencial. Un ejemplo de este tipo de procesos es el arranque desde velocidad cero hasta la velocidad final de un sistema mecánico giratorio. En este caso en lugar de Fuerzas (F) hay que considerar Par o Momento mecánico (T), en lugar de Masas (m) Momentos de Inercia (J) y en lugar de la Velocidades lineales (v) Velocidades angulares (Ω).

De este modo, la ecuación del movimiento resulta:

$$T_m = T_r + J \frac{d\Omega}{dt}.$$

Para resolverla es necesario conocer, además del momento de inercia J del sistema, las curvas características Par(Velocidad):



- del elemento motriz que acciona al sistema, $T_m(\Omega)$
- del elemento resistente que es accionado, $T_r(\Omega)$

En régimen permanente el sistema mecánico gira a la velocidad Ω (esto es, la aceleración $d\Omega/dt = 0$) y $T_m = T_r$, pero para que el sistema haya podido arrancar (esto es, evolucionar desde una velocidad inicial nula hasta la velocidad final Ω) es necesario que $T_m(\Omega) > T_r(\Omega)$ hasta alcanzar la velocidad final.

La forma de la curva $T_m(\Omega)$ depende del elemento motor utilizado. La forma de la curva $T_r(\Omega)$ depende del elemento que se deba mover. Las curvas de los elementos mecánicos pueden reducirse a tres tipos:

Tipo	Par constante	Par creciente	Par decreciente
Ecuación	$T=\text{constante}$	$T= \text{constante} \times \Omega^2$	$T = \text{constante} / \Omega$
Ejemplos	Grúas, ascensores, cintas transportadoras, laminadoras, ...	Bombas, compresores, ventiladores, ...	Molinos, tornos, fresadoras, agitadores, ...

Un parámetro importante de cualquier sistema mecánico es el tiempo de arranque que se define, de forma similar a la duración de los transitorios térmicos, como el que tarda en alcanzar el 95% de la velocidad nominal:

$$t_{\text{arranque}} = \int_0^{0.95 \Omega_N} \frac{J}{T_m - T_r} d\Omega$$

Debido a la forma de las funciones $T_m(\Omega)$ y $T_r(\Omega)$, la evolución de la velocidad y el tiempo de arranque deben obtenerse, normalmente, por métodos numéricos.

Anexo 3.B.- Resumen de procedimientos de cálculo

Método clásico del Operador D

D es la representación simbólica de la operación derivación temporal, esto es: $D = \frac{d}{dt}$

Con esta nomenclatura las ecuaciones de definición, la impedancia y la admitancia de los elementos pasivos ideales pueden escribirse inmediatamente.

Ec. en D		Impedancia	Admitancia
R	$u_R = R \cdot i_R$	$Z_R = R$	$Y_R = \frac{1}{R}$
L	$u_L = L \cdot D \cdot i_L$	$Z_L = L \cdot D$	$Y_L = \frac{1}{L \cdot D}$
C	$i_C = C \cdot D \cdot u_C$	$Z_C = \frac{1}{C \cdot D}$	$Y_C = C \cdot D$

La secuencia de resolución de ecuaciones por este método se basa en que las operaciones de derivación e integración presentan las propiedades algebraicas habituales por lo que todas las ecuaciones presentan finalmente la forma de un polinomio en D multiplicado por la función temporal $f(t)$ que deseamos conocer:

1º.- Escritura de las ecuaciones en D .

$$P(D) \cdot f(t) = g(t)$$

2º.- Obtención de las raíces (ceros) del polinomio haciendo $P(D) = 0$.

A esta ecuación se denomina *ecuación característica* del sistema y, llamando $D_1, \dots, D_n$ a los ceros, puede escribirse:

$$(D - D_1) \cdot (D - D_2) \cdot \dots \cdot (D - D_n) = 0$$

3º.- La función $f_h(t) = C_1 \cdot e^{D_1 t} + C_2 \cdot e^{D_2 t} + \dots + C_n \cdot e^{D_n t}$ es, obviamente, solución de la ecuación $P(D) \cdot f_h(t) = 0$ que se denomina ecuación homogénea.

4°.- Si $f_p(t)$ es una solución particular de la ecuación $P(D)f_p(t)=g(t)$, entonces la solución general de la ecuación es:

$$f(t)=f_h(t)+f_p(t)$$

Este método es, en principio, sencillo, pero presenta las siguientes dificultades:

- Debe conocerse una solución particular. Habitualmente se considera la solución en régimen permanente.
- Deben determinarse las constantes $C_1, \dots, C_n$. Habitualmente utilizando las condiciones iniciales que son conocidas por continuidad.

Esto hace que resulte poco sistemático y, en consecuencia, apropiado sólo para sistemas con pocas ecuaciones (1 ó 2) y pocos elementos que impongan condiciones iniciales (1 ó 2 bobinas o condensadores)

Método de la Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace permite la conversión de ecuaciones integro-diferenciales dependientes del tiempo en ecuaciones algebraicas dependiente de un parámetro complejo (p).

El desarrollo teórico de esta Transformada permite obtener el conjunto de reglas muy simples que se muestran en la tabla adjunta, llamando $F(p)$ a la transformada de $f(t)$.

$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)=p \cdot F(p)-f(0^+)$
$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t) \cdot dt\right)=\frac{F(p)}{p}$
$\mathcal{L}(\text{constante})=\frac{\text{constante}}{p}$
$\mathcal{L}[\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)]=\frac{p \cdot \cos \varphi_0 - \omega \cdot \text{sen} \varphi_0}{p^2 + \omega^2}$

Además, esta Transformación presenta las propiedades algebraicas habituales.

$$\mathcal{L}[f_1(t) + \dots + f_n(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \dots + \mathcal{L}[f_n(t)]$$

$$\mathcal{L}[\text{constante} \cdot f(t)] = \text{constante} \cdot \mathcal{L}[f(t)]$$

Aplicando estas reglas a los elementos pasivos ideales, representando en mayúsculas las funciones $F(p)$ y en minúsculas las funciones $f(t)$, se obtiene la representación gráfica que aparece en la página siguiente.

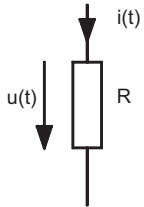
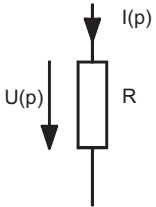
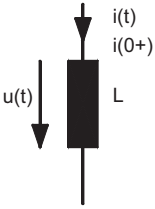
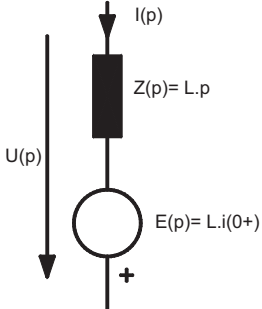
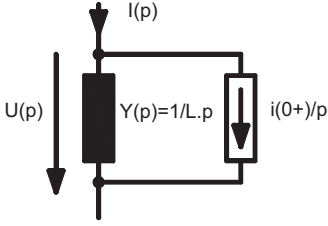
La antitransformación, o conversión de las soluciones en (p) a las soluciones temporales, puede realizarse utilizando tablas o directamente. Si la función transformada $F(p)$ se escribe como cociente de dos polinomios $N(p)$ y $D(p)$: $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1) \cdot \dots \cdot (p-p_n)}$, entonces la función temporal $f(t)$ vale¹:

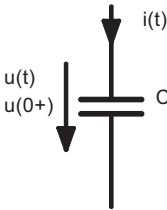
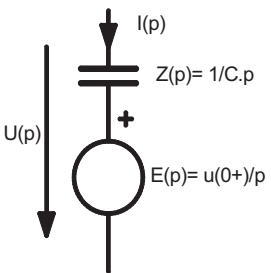
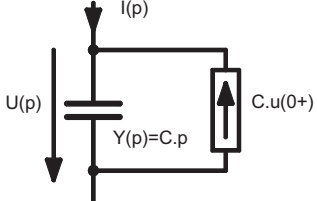
$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{N(p_i)}{\left[\frac{D(p)}{(p-p_i)} \right]_{p=p_i}} \cdot e^{p_i t}$$

Así, una secuencia de resolución muy visual es:

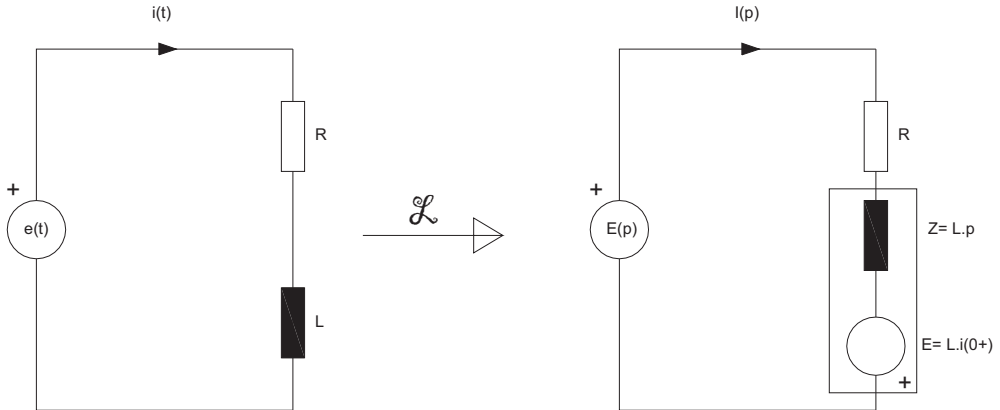
- 1º.- Dibujo del circuito con todos sus elementos, indicando las condiciones iniciales en bobinas y condensadores (circuito con magnitudes temporales)
- 2º.- Dibujo del circuito con los elementos transformados
- 3º.- Obtención del sistema de ecuaciones, bien por el procedimiento general o bien directamente en forma matricial
- 4º.- Determinación algebraica de las soluciones en (p)
- 5º.- Obtención de las soluciones en (t) mediante antitransformación

⁽¹⁾ Siempre que p_i no sea un polo doble y que el orden de $N(p)$ sea menor que el orden de $D(p)$. Estas condiciones se dan habitualmente en los circuitos eléctricos.

ecuación en (t)	ecuación en (p)	representación en (t)	representación en (p)
$u=R \cdot i$	$U=R \cdot I$		
$u=L \frac{di}{dt}$	$U=L \cdot p \cdot I - L \cdot i(0^+)$		
$i=\frac{1}{L} \int_0^t u \cdot dt + i(0^+)$	$I=\frac{U}{Lp} + \frac{i(0^+)}{p}$		

ecuación en (t)	ecuación en (p)	representación en (t)	representación en (p)
$u=\frac{1}{C}\int\limits_{0^+}^t i\cdot dt+u(0^+)$	$U=\frac{I}{C\cdot p} + \frac{u(0^+)}{p}$		
$i=C\frac{du}{dt}$	$I=C\cdot p\cdot U-C\cdot u(0^+)$		

Considerando, por ejemplo, un circuito serie RL alimentado por una fuente de tensión, la corriente en $t(0)$ en la bobina es $i_L(0)$.



Caso 1: La fuente tiene un valor constante: $e(t) = E$.

Como la transformada de la fuente es $E(p) = \frac{E}{p}$, observando el circuito transformado de Laplace, la transformada de la corriente es:

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p} + L \cdot i_L(0)}{R + Lp} = \frac{\frac{E}{p} + p \cdot i_L(0)}{p \cdot \left(p + \frac{R}{L}\right)}$$

Esto es, los polos (los valores que hacen cero el denominador) son: $p_1 = 0$ y $p_2 = -R/L$. Como la expresión transformada se ha escrito en la forma adecuada para aplicar la expresión de antitransformación, la corriente $i(t)$ se obtiene directamente:

$$i(t) = \frac{E}{R} - \left(\frac{E}{R} + i(0) \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$$

El primer sumando se ha obtenido del polo $p_1 = 0$ y el segundo del polo $p_2 = -R/L$.

Caso 2: La fuente varía sinusoidalmente: $e(t) = E_{\max} \cos(\omega t + \varphi_e)$.

Como la transformada de la fuente es ahora $E(p) = E_{\max} \frac{p \cos \varphi_e - \omega \operatorname{sen} \varphi_e}{p^2 + \omega^2}$, el circuito transformado conduce a:

$$I(p) = \frac{E_{\max} \cdot (p \cos \varphi_e - \omega \operatorname{sen} \varphi_e) + (p^2 + \omega^2) \cdot L \cdot i_L(0)}{(p^2 + \omega^2) \cdot (R + Lp)}$$

Esto es, los polos son: $p_1 = +j\omega$, $p_2 = -j\omega$ y $p_3 = -R/L$. Los polos complejos siempre aparecen por parejas conjugadas porque la solución $i(t)$ es, obviamente, real. Aplicando directamente la expresión de antitransformación

$$i(t) = \frac{E_{\max}}{2} \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi_e)}}{R + j\omega L} + \frac{e^{-j(\omega t + \varphi_e)}}{R - j\omega L} \right] + \left(\frac{N(p = -\frac{R}{L})}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$$

El primer sumando dentro del corchete se ha obtenido del polo $p_1 = +j\omega$, el segundo del polo $p_2 = -j\omega$ y el último sumando, que no se ha desarrollado completamente, del polo $p_3 = -R/L$.

Si los sumandos de dentro del corchete se simplifican resulta más claro que corresponden con una función real. Llamando al número complejo $\vec{Z} = R + j\omega L$, su módulo y su argumento se obtienen fácilmente y conducen a:

$$\frac{E_{\max}}{Z} \cos(\omega t + \varphi_e - \varphi_Z)$$

Podemos extraer unas conclusiones generales útiles:

1º.- El régimen permanente lo definen los polos que no tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$, esto es, polos cuya parte real sea cero:

- Si el polo es estrictamente cero, $e^{0t} = 1$, corresponde con un régimen permanente con fuentes constantes (que pueden ser nulas o no)

- Si son dos polos complejos conjugados, $e^{\pm j\omega t}$, su suma es una función sinusoidal, $e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2\cos(\omega t)$ y corresponde con un régimen permanente (estacionario) con fuentes sinusoidales

2º.- El régimen transitorio lo definen los polos con parte real no-nula. Por los mismos motivos indicados al referirnos al régimen permanente, el transitorio puede presentar forma exponencial (si los polos son reales) o sinusoidal amortiguada (si los polos son complejos conjugados).

Para simplificar la tarea, las tablas con soluciones de ecuaciones diferenciales se han utilizado tradicionalmente. Hoy en día, la ayuda de los ordenadores permite tanto la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales como su resolución algebraica. Numerosos programas de cálculo son capaces de resolver este tipo de ecuaciones. Además, la integración de esta capacidad de resolución con las ecuaciones básicas de los sistemas eléctricos ha conducido a un buen número de programas específicos de simulación de circuitos eléctricos que aún facilitan más el estudio y análisis.

